கணிதம் – துணைப்பாடம்

(பகுதி III)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

ஏ. கோவிந்தராஜுலு, எம்.எஸ்ஸி., பி.ஈடி.,

கணிதப் பேராசிரியர்,

சிக்கண்ணா அரசினர் கலைக் கல்லூரி,

திருப்பூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—414

கணிதம் – துணைப்பாடம்

(பகுதி III)

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்
ஏ. கோவிந்தராஜுலு, எம்.எஸ்ஸி., பி.ஈடி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
சிக்கண்ணா அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
திருப்பூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—January, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 414

© Tamil Nadu Text Book Society

ANCILLARY MATHEMATICS—Vol. III

A. GOVINDARAJULU

Price Rs. 12-25

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
KUMARAN PRESS,
298, Mint Street,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி–உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான ‘கணிதம் – துணைப்பாடம் – பகுதி III’ என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 414ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 449 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

I. இயற்கணிதம் (Algebra)

1. அணிகள்—வரையறைகள் ... 1
2. பல்வேறு அணிகள் (Various Kinds of Matrices) ... 58
3. அணி அளவை (Rank of a Matrix) ... 102
4. ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solution of Simultaneous Equations) .. 130
5. சிறப்பியல்பு சமன்பாடு (Characteristic Equation) ... 164

II. நவீன இயற்கணிதம் (Modern Algebra)

6. கணங்கள் (Sets) ... 201
7. குலங்கள் (Groups) ... 222
8. வளையம் (Ring) ... 281

III. நுண்கணிதம் (Calculus)

9. மடங்குத் தொகையீடுகள் (Multiple Integrals) ... 307
10. இலாப்லசின் மாற்றம் (The Laplace Transform) ... 340
11. பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் (Partial Differential Equations) ... 374
12. ஃபூரியர் தொடர் (Fourier Series) ... 432

பக்கம்

IV. புள்ளியியல் (Statistics)

13. புள்ளியியல் (அறிமுகம்) ... 509

14. விளக்கப்படங்கள் ... 524

15. மையப்போக்கின் அளவைகள் (Measures of Central tendency) ... 533

16. பரவுகை அளவைகள் ... 558

17. வளைகோடு பொருத்தல் (Curve fitting) ... 588

18. ஒட்டுறவு (Correlation) ... 598

19. ஈருறுப்பு, இயல்நிலை, பாய்ஸான் பரவல்கள் (Binomial, Normal and Poisson Distributions) ... 618

மேற்கோள் நூல்கள் ... 641

கலைச் சொற்கள் ... 643

I. இயற்கணிதம்
(Algebra)

1. அணிகள்-வரையறைகள்

1-1. அணி—வரையறை

m நிரைகள், n நிரல்கள், mn மூலகங்கள் கொண்ட ஒரு செவ்வக வரிசை "$m \times n$" அணி எனப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = [a_{ij}]$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செவ்வக வரிசையில் m நிரைகளும் n நிரல்களும் உள்ளன. இதிலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை mn ஆகும். இவை மெய்யெண்களாகவோ அல்லது சிக்கலெண்களாகவோ இருக்கக்கூடும். இதில் a_{ij} என்பது i ஆவது நிரையில் j ஆவது நிரலிலுள்ள மூலகமாகும். மூலகம் ஒவ்வொன்றும் அணி மூலகம் (Element of a matrix) எனப்படும். செவ்வக வரிசையைப் பிறை அடைப்புகள் ( ), பகரவடைப்புகள் [ ] அல்லது இரட்டை நிலைக்குத்துக் கோடுகள் ‖ ‖ இட்டு ஓர் அணியைக் குறியீடு செய்வது மரபு. ஒரு பெரிய பட்டை எழுத்தின் மூலமும் குறியீடு செய்யலாம். செவ்வக வரிசையை வசதியாகக் குறிக்கும் ஒரு வழியே அணி என்பதாகும். இதற்குப் பெருமானம் (numerical value) கிடையாது. $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots,$ என்பவை அணியின் மூலைவிட்ட மூலகங்களாகும் (Diagonal elements).

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$\text{(i)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 5}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \\ 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

A, B முறையே 4×5, 4×2 அணிகளாகும்.

1-2. நிரை அணி (Row matrix)

ஒரு நிரையும் n நிரல்களும் கொண்ட ஓர் அணி நிரை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு : $A = [3,\ 4,\ 7,\ 6]_{1 \times 4}$

A ஒரு 1×4 நிரை அணியாகும்.

1-3. நிரல் அணி (Column matrix)

m நிரைகளும் ஒரு நிரலும் கொண்ட ஓர் அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

B ஒரு 4×1 நிரல் அணியாகும்.

1-4. சதுர அணி (Square matrix)

ஓர் அணியில் நிரைகளின் எண்ணிக்கை நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமெனின், அது ஒரு சதுர அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

A, B, C அணிகள் முறையே 2×2, 3×3, $n \times n$ சதுர அணிகளாகும்.

1-5. அணிக்கோவை (Determinant)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

என்பது ஒரு $m \times n$ அணி எனின்,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

என்பது A அணியின் அணிக்கோவையாகும். இது $|A|$ எனக் குறிக்கப்பெறும்.

1-6. முற்றும் பூச்சிய அணி (Null matrix or Zero matrix)

$m \times n$ அணி ஒன்றின் மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின், அது (m, n) தரமுடைய முற்றும் பூச்சிய அணி எனப்படும். அது $0_{m,n}$ எனக் குறிக்கப்பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$0_{4,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1-7. சம மூலைவரை அணி (Diagonal matrix)

ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்களைத் தவிர்த்து மற்றவை யாவும் பூச்சியமெனின், அது ஒரு சம மூலைவரை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

A, B முறையே தரம் n, 4 உடைய சம மூலை வரை அணிகளாகும்.

1-8. மூலைவரை அணி (Scalar matrix)

ஒரு சம மூலை வரை அணியில் மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் சமமெனில், அது ஒரு மூலை வரை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

A, B முறையே தரம் 5, 4 உடைய மூலைவரை அணிகளாகும்.

1-9. அணி அலகு (Unit matrix)

ஒரு சதுர அணியில் மூலைவிட்டத்திலுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுக்குச் சமமாகவும், மற்ற மூலகங்கள் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகவுமிருப்பின் அது அணி அலகு எனப்படும். இது I எனக் குறிக்கப் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

I_2, தரம் 2 கொண்ட அணி அலகு

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

I_3, தரம் 3 கொண்ட அணி அலகு

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

I_n, தரம் n கொண்ட அணி அலகு

பொதுப்படையாக, n தரமுடைய ஓர் அணி அலகில்

$$i = j \text{ எனின் } a_{ij} = 1$$

$$i \neq j \text{ எனின் } a_{ij} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

1-10. கீழ் அணி (Sub-matrix)

ஓர் அணியில் சில நிரைகளை அல்லது சில நிரல்களை அல்லது இரண்டையும் நீக்கிக் கிடைக்கப்பெறும் அணி கொடுத்துள்ள அணியின் கீழணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 5}$$

என்ற அணியில்

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

முதலியவை முறையே 2, 3, 4 ... தரமுடைய A-ன் கீழணிகள் ஆகும்.

1-11. முக்கோண அணிகள் (Triangular matrices)

ஒரு சதுர அணியில் மூலை விட்டத்திற்கு அடியிலிருக்கும் மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின், அது மேல் முக்கோண அணி (Upper triangular matrix) எனவும், மூலை விட்டத்தின் மேலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின் அது கீழ் முக்கோண அணி (Lower triangular matrix) எனவும் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ஒரு மேல் முக்கோண அணியாகும்.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n.}$$

ஒரு கீழ் முக்கோண அணியாகும்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

A, B முறையே மேல் முக்கோண அணி, கீழ் முக்கோண அணிகளாகும்.

குறிப்பு :

ஒரு சதுர அணியில் மூலை விட்டத்தின் மேலும் கீழும் உள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின், அது சம மூலை வரை அணி (Diagonal matrix) ஆகும்.

1-12. சமச் சீரணி (Symmetric matrix)

$A = [a_{ij}]$ எனும் ஒரு சதுர அணியில் $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots n)$ எனின், அது ஒரு சமச்சீரணி எனப்படும்.

பூச்சிய அணியும், அணி அலகும் சமச் சீரணிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

இதில் $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 5 & -1 & 4 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

அணி B-ல்

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{14} = a_{41}$$

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{24} = a_{42}, \quad a_{34} = a_{43}.$$

1-13. எதிர்ச் சீரணி (Skew Symmetric matrix)

$A = [a_{ij}]$ எனும் ஒரு சதுர அணியில்

$$a_{ij} = -a_{ji} \; (i, j = 1, 2, \dots, n)$$ எனின்,

அஃது ஓர் எதிர்ச் சீர் அணி எனப்படும்.

ஓர் எதிர்ச் சீரணியில்

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

$$\therefore \quad 2a_{ii} = 0 \text{ (அல்லது) } a_{ii} = 0$$

எனவே, எதிர்ச் சீர் அணியின் மூலை விட்டத்தில் உள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -5 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

1-14. சம அணிகள் (Equal matrices)

இரு அணிகளது தரமும் ஒத்த மூலகங்களும் சமமெனின், அவை சம அணிகள் எனப்படும். (அதாவது) $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ என்ற இரு அணிகளில் ஒவ்வொன்றினது தரமும் $m \times n$ எனவும்,

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m$$

$$j = 1, 2, \ldots n)$$

எனவும் இருப்பின், $A = B$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$ எனின்

$$A = B \quad [\because \; a_{ij} = b_{ij} \; (i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3)]$$

மீண்டும்,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \; 2 \times 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \; 2 \times 3$$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $a_{ij} \neq b_{ij} \quad [i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3]$

$\therefore \quad A \neq B$

1-15. ஓர் அணியின் எண் பெருக்கி (Scalar multiple of a matrix)

$A = [a_{ij}], \quad (i = 1, 2, \ldots m)$
$(j = 1, 2, \ldots n)$

ஒரு $m \times n$ அணி எனவும், λ யாதேனும் ஓர் எண் (சிக்கலெண் அல்லது மெய்யெண்) எனவும் கொள்வோம். பின் $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(அதாவது) அணி A-ன் ஒவ்வொரு மூலமும் λ ஆல் பெருக்க வரும் அணி λA ஆகும்.

$\lambda = -$ எனின், $\lambda A = -A$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \\ 7 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \; 3 \times 4$$ எனின்,

$$3A = \begin{bmatrix} 3\times 3 & 3\times 4 & 3\times 2 & 3\times 5 \\ 3\times 2 & 3\times 1 & 3\times 3 & 3\times(-6) \\ 3\times 7 & 3\times(-4) & 3\times 2 & 3\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 & 15 \\ 6 & 3 & 9 & -18 \\ 21 & -12 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ எனின்,

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \cdots & \lambda a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ எனின்,

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

1-16. அணி கூட்டல் (Matrix addition)

இரு அணிகளில் நிரை, நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமமெனின், ஒத்த மூலகங்களின் கூட்டுத் தொகையை மூலகங்களாகக் கொண்ட மூன்றுவது அணி முதல் இரு அணிகளது கூட்டலாகும்.

(அதாவது) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$B = [b_{ij}]_{m \times n}$

இரு அணிகளெனின்,

$$C = A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

மேலும் $D = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

எனின்,

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2 & 5+1 & 7+3 & 4+5 \\ 6+4 & 1+5 & 2+6 & 3+2 \\ 5+3 & 6+1 & 3+2 & 2+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 & 9 \\ 10 & 6 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -5 \\ -4 & -5 & -6 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-2 & 5-1 & 7-3 & 4-5 \\ 6-4 & 1-5 & 2-6 & 3-2 \\ 5-3 & 6-1 & 3-2 & 2-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

மீண்டும், $A + (-1)A = 0$

$(-1)A$ என்பது அணி A-ன் நேர் மாறு கூட்டு அணி (Additive Inverse) எனப்படும்.

1-17. கூட்டல் நியதிகள் (Addition laws)

$$A = [a_{ij}],\quad B = [b_{ij}],\quad C = [c_{ij}]$$

என்பவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு $m \times n$ அணி எனின்,

$$A + B,\quad B + A,\quad A + (B + C),\quad (A + B) + C$$

அணிகளும் $m \times n$ அணிகளாகும்.

(i) **சேர்ப்பு விதி (Associative law)**

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] \\ &= A + (B + C)\end{aligned}$$

(ii) **பரிமாற்று விதி (Commutative law)**

$$A + B = B + A$$

$$\begin{aligned}A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] \\ &= [a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [b_{ij} + a_{ij}] \\ &= [b_{ij}] + [a_{ij}] \\ &= B + A.\end{aligned}$$

(iii) **பிரிப்பீட்டு விதி (Distributive law)**

λ ஓர் எண்ணி (scalar) எனின்,

$$\lambda\ (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$\begin{aligned}\lambda (A + B) &= \lambda ([a_{ij}] + \lambda [b_{ij}]) \\ &= (\lambda [a_{ij}] + \lambda [b_{ij}]) \\ &= [\lambda a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] \\ &= \lambda A + \lambda B\end{aligned}$$

(iv) **முற்றொருமை அணி (Identity matrix)**

$$A + 0 = 0 + A = A$$

இங்கு 0 ஒரு முற்றும் பூச்சிய அணி.

$$A + 0 = [a_{ij}] + [0]$$
$$= [a_{ij} + 0] = [0 + a_{ij}] = [0] + [a_{ij}]$$
$$= 0 + A$$

மேலும்,

$$A + 0 = [a_{ij} + 0]$$
$$= [a_{ij}] = A$$

A தரம் கொண்ட முற்றும் பூச்சிய அணி (null matrix), முற்றொருமை அணி எனப்படும்.

மாதிரி 1 :

$$2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 12 \\ 16 & 6 & 6 \\ 10 & 12 & 20 \end{bmatrix}$$

என நிறுவுக.

$$2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 12 & 0 & 4 \\ 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4 & 2+0 & 4+8 \\ 4+12 & 6+0 & 2+4 \\ 2+8 & 0+12 & 4+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 12 \\ 16 & 6 & 6 \\ 10 & 12 & 20 \end{bmatrix}$$

மாதிரி 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

எனின் $A - B$ காண்க.

$$A - B = A + (-1)B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 & 1-4 \\ 2-1 & 0-1 & 1-1 & 2-1 \\ 3-2 & 1-3 & 2-0 & 1-2 \\ 4-3 & 2-1 & 5-4 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1-18. அணிகள் பெருக்கல் (Multiplication of matrices)

A, B என்ற இரு அணிகளில் A அணியிலுள்ள நிரல்களின எண்ணிக்கை B அணியிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமெனின், அவ்விரு அணிகளும் பெருக்கப் படக்கூடும்.

A, B அணிகள் முறையே $m \times n$, $n \times p$ அணிகளெனின், இவ்விரு அணிகளைப் பெருக்கக் கிடைக்கும் அணி C ஒரு $m \times p$ அணியாகும்.

C அணியிலுள்ள $i\,j$ ஆவது மூலகம், A அணியின் i நிரை B அணியின் j நிரல் இவற்றின் உட்பெருக்குத் தொகை (inner product) ஆகும்.

(அதாவது) $A = [a_{ij}]$ $(i = 1, 2, \dots m$
$(j = 1, 2, \dots n$

$B = [b_{ij}]$ $(i = 1, 2, \dots n$
$(j = 1, 2, \dots p)$

எனின்,

$C = [c_{ij}]$ $(i = 1, 2, \dots, m$
$(j = 1, 2, \dots, p)$

இங்கு $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj}$$

குறிப்பு: AB பெருக்கத்தில் A முன் காரணி (Prefactor) எனவும், B பின் காரணி (Post factor) எனவும் கூறப்படும்.

மாதிரி 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 4},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

எனின். AB அணியின் C_{12}, C_{23} மூலகங்களைக் காண்க.

A அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை B அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாதலின், A B அணிகளின் பெருக்கம் AB உண்டு.

AB அணியின் C_{12} மூலகம் A அணியின் முதல் நிரை B அணியின் இரண்டாவது நிரல் இவற்றின் உட்பெருக்குத் தொகையாம்.

A அணியின் முதல் நிரை $[2, 1, 2, 1]$

B அணியின் இரண்டாவது நிரல் $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

இவற்றின் உட் பெருக்குத் தொகை

$$= 2(-1) + 1(4) + 2(1) + 1(-3)$$
$$= -2 + 4 + 2 - 3$$
$$= 1.$$

எனவே AB அணியின் C_{13} மூலகம் 1

AB அணியின் C_{23} மூலகம் A அணியின் இரண்டாவது நிரை, B அணியின் மூன்றாவது நிரல் இவற்றின் உட்பெருக்குத் தொகையாகும்.

A அணியின் இரண்டாவது நிரை $[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

B அணியின் மூன்றாவது நிரல் $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

இவற்றின் உட்பெருக்குத் தொகை

$$= 1(0) + 1(1) + 1(0) + 1(2)$$
$$= 0 + 1 + 0 + 2$$
$$= 3.$$

எனவே, AB அணியின் C_{23} ஆவது மூலகம் 3.

மாதிரி 4 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

எனின், AB அணி காண்க.

A அணியிலுள்ள நிரல்களும் B அணியிலுள்ள நிரைகளும் எண்ணிக்கையில் சமமாதலின் இவ்விரு அணிகளின் பெருக்கம் AB உண்டு.

A, B முறையே 3×3, 3×4 அணிகளாதலின், AB ஒரு 3×4 அணியாகும். A அணியின் முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரைகள் R_1, R_2, R_3 எனவும், B அணியின் முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது நிரல்கள் C_1, C_2, C_3, C_4 எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

$$\text{பின் } AB = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & R_1C_3 & R_1C_4 \\ R_2C_1 & R_2C_2 & R_2C_3 & R_2C_4 \\ R_3C_1 & R_3C_2 & R_3C_3 & R_3C_4 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

இங்கு R_2C_3 என்பது A அணியின் இரண்டாவது நிரை B அணியின் மூன்றாவது நிரல் ஆகியவற்றின் உட்பெருக்குத் தொகையாகும்.

$$R_1\,C_1 = [\;0 \quad 1 \quad -1\;] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0(1) + 1(2) - 1(3) = 2 - 3 = -1$$

$$R_1\,C_2 = [\;0 \quad 1 \quad -1\;] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0(2) + 1(3) - 1(5) = 3 - 5 = -2.$$

$$R_1\,C_3 = [\;0 \quad 1 \quad -1\;] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$R_1 C_4 = [\,0 \quad 1 \quad -1\,] \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 0 + 2 - 6 = -4$$

$$R_2 C_1 = [\,-1 \quad 0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 + 0 + 3 = 2$$

$$R_2 C_2 = [\,-1 \quad 0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = -2 + 0 + 5 = 3$$

$$R_2 C_3 = [\,-1 \quad 0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 + 0 + 2 = -1$$

$$R_2 C_4 = [\,-1 \quad 0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = -4 + 0 + 6 = 2$$

$$R_3 C_1 = [\,0 \quad 2 \quad -2\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 + 4 - 6 = -2$$

$$R_3 C_2 = [\;0 \quad 2 \quad -2\;] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0 + 6 - 10 = -4$$

$$R_3 C_3 = [\;0 \quad 2 \quad -2\;] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + 2 - 4 = -2$$

$$R_3 C_4 = [\;0 \quad 2 \quad -2\;] \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 0 + 4 - 12 = -8$$

$$\therefore \quad AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & -8 \end{bmatrix}_{3 \times 4}.$$

மாதிரி 5 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

எனின், $A^2 - B = I$ என நிறுவுக.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^2 - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

மாதிரி 6 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

எனின் $AB = 0$ என நிறுவுக.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{R_1\ C_1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} & \underset{R_1\ C_2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} & \underset{R_1\ C_3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \underset{R_2\ C_1}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} & \underset{R_2\ C_2}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} & \underset{R_2\ C_3}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \underset{R_3\ C_1}{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} & \underset{R_3\ C_2}{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} & \underset{R_3\ C_3}{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+6-5 & -2+12-10 & -1+6-5 \\ -2-18+20 & -2-36+40 & -2-18+20 \\ -3-12+15 & -6-24+30 & -3-12+15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

1-19. பெருக்கல் நியதிகள் (Laws of Matrix Multiplication)

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \; C = [C_{ij}]$$

என்பவை முறையே $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$ அணிகளெனின், AB, BC, $A(BC)$, $(AB)C$ முதலிய பெருக்கங்கள் உண்டு.

தொகுப்பு விதி (Associativity)

$$(AB)C = A(BC)$$

அதாவது, $\{[a_{ij}][b_{ij}]\}[C_{ij}] = [a_{ij}]\{[b_{ij}][c_{ij}]\}$ இவ்விரு பெருக்கங்களும் தனித்தனியே

$[\Sigma a_{ir} b_{rs} c_{sj}]$-க்குச் சமம்.

$$\therefore \quad (AB)C = A(BC)$$

குறிப்பு : $A^m . A^n = A^{m+n} = A^{n+m} = A^n A^m$

$$(A^m)^n = A^{mn} = (A^n)^m$$

மேலும், $A^\circ = I$ என வரையறை செய்யப்படுகிறது.

(ii) பங்கீட்டு விதி (Distributive law)

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(B + C) = [a_{ij}]\{[b_{ij}] + [C_{ij}]\}$$

$$= [a_{ij}][b_{ij} + c_{ij}]$$

$$= \left[\sum_{1}^{n} a_{i\lambda}(b_{\lambda j} + c_{\lambda j})\right]$$

$$= \left[\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} b_{\lambda j}\right] + \left[\sum_{\lambda=1}^{n} a_{i\lambda} c_{\lambda j}\right]$$

$$= AB + AC.$$

இவ்வாறே $(A + B)C = AC + BC$ என நிறுவலாம்.

(ii) **மாற்று விதி (Commutative law)**

மாற்று விதி அணி பெருக்கலுக்குப் பொருந்தாது.

$A = [\,a_{ij}\,]$, $B = [\,b_{ij}\,]$

ஆகியவை முறையே $m \times n$, $n \times p$ அணிகளெனின் AB பெருக்கம் உண்டு. ஆனால் B அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், A அணியிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமல்ல. ஆதலின், BA பெருக்கம் கிடையாது.

மீண்டும், BA பெருக்கம் உண்டெனினும், AB-ம் BA-ம் சமமாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

எனவே, $AB \neq BA$.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

AB பெருக்கம், BA பெருக்கம் இரண்டும் A, B அணிகளுக்கு உண்டு.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+18 & 7+24 \\ 10+24 & 14+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 31 \\ 34 & 46 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+14 & 15+28 \\ 6+16 & 18+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad AB \neq BA$

இங்கு AB, BA பெருக்கங்கள் உண்டெனினும் AB-ம், BA-ம் சமமல்ல.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+3 & 3+0+6 \\ 4+10+6 & 12+0+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+12 & 2+15 & 3+18 \\ 2+0 & 4+0 & 6+0 \\ 1+8 & 2+10 & 3+12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 17 & 21 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

இங்கு AB, BA பெருக்கங்கள் உண்டெனினும், அவை முறையே 2×2, 3×3 அணிகளாகும்.

$$\therefore \quad AB \neq BA$$

குறிப்பு 1 :

$AB = 0$ எனின், A, B அணிகளில் யாதேனும் ஒன்று பூச்சியமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

எனின்,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

இங்கு $A \neq 0$, $B \neq 0$. ஆனால் $AB = 0$.

குறிப்பு 2 :

$A \neq 0$, $AB = AC$ எனின், $B \neq C$ என்பது அணி பெருக்க ஒழுங்குப் பொருந்தாது

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & +2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$ எனில்,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 15 & 0 \\ -3 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 15 & 0 \\ -3 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $AB = AC$, $A \neq 0$ ஆனால், $B \neq C$.

மாதிரி 7 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ எனின்

$A\ (BC) = (AB)\ C$ என நிறுவுக.

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 9 & 11 \\ 17 & 23 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A\ (BC) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 9 & 11 \\ 17 & 23 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 166 & 216 \\ 67 & 79 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 15 & 14 & 37 \\ 12 & 7 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (AB)\,C = \begin{bmatrix} 27 & 15 & 14 & 37 \\ 12 & 7 & 11 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 166 & 216 \\ 67 & 79 \end{bmatrix}$$

எனவே, $A\,(BC) = (AB)\,C$

மாதிரி 8 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

எனின்,

$A\,(B + C) = AB + AC$ என நிறுவுக.

$$A\,(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 10 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

க. து.—3

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 9 & 3 & 14 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\therefore \quad AB + AC = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 9 & 3 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 10 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= A(B + C)$$

மாதிரி 9 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

எனின்,

(i) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(ii) $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

என நிறுவுக.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 36 & 10 \\ 15 & 39 & 11 \\ 21 & 54 & 16 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 15 \\ 8 & 12 & 15 \\ 11 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 20 & 6 \\ 9 & 21 & 7 \\ 16 & 37 & 11 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 9 \\ 7 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^2 = (A + B)\,(A + B)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 75 & 39 \\ 36 & 81 & 43 \\ 55 & 123 & 64 \end{bmatrix}$$

(i) $A^2 + AB + BA + B^2$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 36 & 10 \\ 15 & 39 & 11 \\ 21 & 54 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 12 & 15 \\ 8 & 12 & 15 \\ 11 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 8 & 20 & 6 \\ 9 & 21 & 7 \\ 16 & 37 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 9 \\ 7 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 34 & 75 & 39 \\ 36 & 81 & 42 \\ 55 & 123 & 64 \end{bmatrix} = (A + B)^2$$

(ii) $(A+B)\,(A-B)$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-1 & 4-1 & 7-1 \\ 2-1 & 5-1 & 1-2 \\ 3-1 & 6-3 & 2-3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 12 & 37 & -7 \\ 12 & 39 & -6 \\ 19 & 59 & -10 \end{bmatrix}$$

$A^2 - AB + BA - B^2$

$$=\begin{bmatrix} 15 & 36 & 10 \\ 15 & 39 & 11 \\ 21 & 54 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 12 & 15 \\ 8 & 12 & 15 \\ 11 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 8 & 20 & 6 \\ 9 & 21 & 7 \\ 16 & 37 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 4 & 9 & 9 \\ 7 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 15-7+8-4 & 36-12+20-7 & 10-15+6-8 \\ 15-8+9-4 & 32-12+21-9 & 11-15+7-9 \\ 21-11+16-7 & 54-18+37-14 & 16-21+11-16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 37 & -7 \\ 12 & 39 & -6 \\ 19 & 59 & -10 \end{bmatrix}$$

$\therefore \ (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2.$

மாதிரி 10 :

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \sin\alpha \\ \cos\alpha \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \cos\beta \sin\beta \\ \cos\beta \sin\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix} \cdot \ \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

எனின், $AB = 0$ என நிறுவுக.

$$AB = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha \sin\alpha \\ \cos\alpha \sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \cos\beta \sin\beta \\ \cos\beta \sin\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha \cos^2\beta + \cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta & \cos^2\alpha \cos\beta \sin\beta + \sin^2\beta \cos\alpha \sin\alpha \\ \cos^2\beta \cos\alpha \sin\alpha + \cos\beta \sin^2\alpha \sin\beta & \cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) & \cos\alpha\sin\beta\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) & \sin\alpha\sin\beta\,(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta) & \cos\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta) & \sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\pi}{2} & \cos\alpha\sin\beta\cos\frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\frac{\pi}{2} & \sin\alpha\sin\beta\cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே $AB = 0$

(iv) $AO = OA = 0$

A, O முறையே $m \times n$ அணி,

$n \times p$ முற்றும் பூச்சிய அணி எனின்

$$A_{m\times n}\, O_{n\times p} = O_{m\times p}$$

இவ்வாறே, A, O முறையே $n \times p$ அணி,

$m \times n$ முற்றும் பூச்சிய அணி எனின்

$$O_{m\times n}\, A_{n\times p} = O_{m\times p}.$$

குறிப்பாக A ஒரு சதுர அணி, O ஒரு முற்றும் பூச்சிய சதுர அணி எனவும் கொள்வோம்.

பின் $AO = OA = 0$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$ $\quad O = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$

எனின்,

$$AO = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$

எனின்,

$$OA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ எனின்,

$$AO = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$OA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(v) $AI = A$

A ஒரு $m \times n$ அணி எனவும், I_n ஒரு $n \times n$ சதுர அணி அலகு எனவும் கொள்வோம். பின், $A I_n = A$.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 3}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

எனில்,

$$AI_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 3} = A$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 4} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

எனின்,

$$BI_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 4} = B$$

குறிப்பாக, I ஓர் அணி அலகு எனவும், A அதே தரம் கொண்ட ஒரு சதுர அணி எனவும் கொள்வோம்.

பின், $AI = IA = A$.

ஒரு சமன்பாடுகளின் தொகுதியை (System of equations) நல்ல கட்டுக்கோப்பான வடிவில் அமைப்பது அணிகளின் முக்கிய பலன்களில் ஒன்ருகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, பின்வரும் m ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = c_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \dots + a_{3n} x_n = c_3 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = c_m. \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{bmatrix}$$ எனின்

மேற்குறிப்பிட்டுள்ள சமன்பாடுகள்,

$AX = C$ என்ற ஓர் அணி சமன்பாட்டிற்குச் சமமாகும்.

1-20. அணிக்கோவை (Determinant)

சமதரம் கொண்ட இரு சதுர அணிகளது அணிக்கோவைகளின் பெருக்குத் தொகை, அவ்வணிகளது பெருக்கத்தின் அணிக்கோவைக்குச் சமமாகும்.

(அதாவது) $A = [a_{ij}], \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

$B = [b_{ij}], \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$

எனின்

$$|AB| = |A| \ |B|$$

நிரூபணம் :

$A = [a_{ij}], \ (i, j = 1, 2, \ldots n)$

$B = [b_{ij}], \ (i, j = 1, 2, \ldots n).$

$$\therefore \quad AB = \left[\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\, b_{rj} \right]$$

$$\therefore \quad |AB| = |\Sigma\, a_{ir}\, b_{rj}|$$

$$= |A|\;|B|$$

குறிப்பு : $|AB| = |BA|$.

மாதிரி 11 :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

$$(A)^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ எனின்}$$

$$(A)^m = \begin{bmatrix} \cos m\theta & \sin m\theta \\ -\sin m\theta & \cos m\theta \end{bmatrix} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

(அதாவது) $n = m$ எனின், இது பொருந்தும் எனக் கொள்வோம்.

$$(A)^{m+1} = (A)^m\, A$$

$$= \begin{bmatrix} \cos m\theta & \sin m\theta \\ -\sin m\theta & \cos m\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos m\theta \cos\theta - \sin m\theta \sin\theta & \cos m\theta \sin\theta + \sin m\theta \cos\theta \\ -\sin m\theta \cos\theta - \cos m\theta \sin\theta & -\sin m\theta \sin\theta + \cos m\theta \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(m+1)\theta & \sin(m+1)\theta \\ -\sin(m+1) & \cos(m+1)\theta \end{bmatrix}.$$

எனவே $n = m$-க்கு இது உண்மையெனின்,

$n = m + 1$-க்கும் இது உண்மை என்பது தெளிவாகிறது. இப்பொழுது இது $n = 2, 3$ ……… எனின் உண்மை என நிறுவுவோம்.

$(A)^2 = AA$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

இவ்வாறே

$$A^3 = A^2 A$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta & \cos 2\theta\sin\theta + \sin 2\theta\cos\theta \\ -\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta & -\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(2\theta+\theta) & (\sin 2\theta+\theta) \\ -\sin(2\theta+\theta) & \cos(2\theta+\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$$

எனவே $n = 2, 3$ எனின், இஃது உண்மையாகும். இது n-ன் அனைத்து கூட்டு முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாகும்.

பயிற்சி 1

(1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்

$A+B$, $A-B$ காண்க.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

எனின், $2A+3B$, $7A-2B$ காண்க.

(3) A, B, O என்பவை மூன்று $m \times n$ அணிகளெனின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $A+(-A) = 0$

(ii) $A + O = O + A = A$

(iii) $-(A+B) = -A - B$

(4) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்

பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :

(i) $A + B = B + A$

(ii) $A + (B+C) = (A+B) + C$

(iii) $2(A+B) = 2A + 2B$

(iv) $(A+C)3 = 3A + 3C$

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ எனின்

AB பெருக்கம் காண்க. AB பெருக்கம் உண்டா ?

(6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ எனின்

AB பெருக்கம் காண்க.

(7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ எனின்

(i) $A(B+C) = AB+AC$

(ii) $A(BC) = (AB)C$

என நிறுவுக.

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 12 & 10 & 8 \\ 10 & 11 & 10 \end{bmatrix}$

என் நிறுவுக.

(9) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

எனின் AB, BA காண்க.

(10) $[x\ y\ z] \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ என நிறுவுக.

(11) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

எனின், $[3A - 2B]^2 = I$ என நிறுவுக.

(12) $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

எனின்,

$$I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

என நிறுவுக.

(13) பின்வரும் அணிகளது பெருக்கம் கண்டு அவற்றிற்கு மாற்று விதி பொருந்தாது என நிறுவுக.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(14) பின்வரும் அணிகளது பெருக்கம் கண்டு அவற்றிற்குத் தொகுப்பு விதி பொருந்தும் என நிறுவுக.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(15) $[1\ 2\ 3] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$-ன்

பெருக்கம் காண்க.

(16) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

எனின் $AI = IA = A$ என நிறுவுக.

(17) $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்,

$I = I^2 = I^3 = \dots \dots = I^n$ என நிறுவுக.

(18) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ எனின் $A^2 = 0$ என நிறுவுக.

(19) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$,

$B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$

எனின்,

(i) $A^2 = 6A$

(ii) $(B - 3I)(B - 21I) = 0$ என நிறுவுக.

(20) $B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

எனின்,

(i) $A^2 = B^2 = C^2 = -I$

(ii) $AB = BA = -C$

(iii) $BC = -CB = -A$

என நிறுவுக.

(21) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

எனின் AB காண்க.

(22) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ எனின்,

AB, CA பூச்சிய அணிகளென நிறுவுக.

(23) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

எனின் $AB \neq BA$ என நிறுவுக.

(24) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்

$A^3 - 3A^2 + 3A - I$ காண்க.

(25) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

எனின்,

$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ என நிறுவுக.

(26) இரு அணிகளது பெருக்கம் பூச்சியமெனின், அவற்றில் யாதேனும் ஒன்று பூச்சியமாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதை நிறுவுக.

(27) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்

AB காண்க. $AB \neq BA$ என நிறுவுக.

(28) பின்வரும் அணிகளது பெருக்கம் காண்க.

$$\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ab & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

(29) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

எனின், AB காண்க.

(30) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix},$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

எனின் $AB = 0$, $BA \neq 0$, $AC \neq 0$, $CA = 0$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 22 & 16 \\ 49 & 34 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 30 & 14 & 18 \\ 19 & 11 & 17 \\ 29 & 7 & \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 14 & 20 & 11 & 17 \\ 10 & 15 & 11 & 16 \\ 10 & 16 & 13 & 19 \\ 12 & 19 & 17 & 24 \end{bmatrix}$$

15. 118 21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 28. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$

2. பல்வேறு அணிகள்

(Various kinds of Matrices)

2-1. நிரை, நிரல் மாற்று அணி (Transpose of a matrix)

யாதேனும் ஓர் அணி A-ன் நிரைகளையும், நிரல்களையும் முறையே தன் நிரல்களாகவும், நிரைகளாகவும் கொண்ட ஓர் அணி A அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி (Transpose of the matrix A) எனப்படும். இது A' எனக் குறியிடப்படும்.

எனவே $A = [a_{ij}]$ எனின்

$$A' = [a'_{ji}]$$

இங்கு $a_{ij} = a'_{ji}$

(அதாவது) A அணியின் ij ஆவது மூலகம் A' அணியின் ji ஆவது மூலகமாகும்.

$A = A'$ எனின்,

A அணி ஒரு சமச்சீர் அணியாகும் (Symmetric matrix). ஒரு '$m \times n$' அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி ஒரு '$n \times m$' அணியாகும். ஓர் அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி அதே அணியாகும்.

(அதாவது) $(A')' = A$

எடுத்துக்காட்டு:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 3} \quad \text{எனின்}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

A, A' அணிகளது தரம் முறையே 4×3, 3×4 ஆகும்.

2.2. தேற்றம்

A, B அணிகளது அணித்தரம் (Order of the matrices) சமமெனின்,

$$(A+B)' = A' + B'$$

$$(A-B)' = A' - B'$$

நிரூபணம்

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$B' = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$\therefore (A+B)' =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$= A' + B'$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= A' + B'$$

$$A-B = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$\therefore \quad (A-B)' =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{21}-a_{21} & \cdots & a_{1m}-b_{m1} \\ a_{12}-b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}-b_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}-b_{1n} & a_{2n}-b_{2n} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= A' - B'$$

2-3. தேற்றம்

A, B என்ற இரு அணிகளது அணித்தரம் முறையே $m \times n$, $n \times p$ எனில்

$$(AB)' = B' A'$$

நிரூபணம் :

$$A = [a_{ij}], \; B = [b_{ij}]$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad AB = \left[\sum_j a_{ij} \, b_{jk} \right] = [C_{ik}] = C \quad (\text{என்க.})$$

எனவே,

$$(AB)' = C' = [C'_{ki}]$$

$$= [c_{ik}]$$

$$= \left[\sum_j a_{ij} \, b_{jk} \right] \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$B' A' = \left[\sum_j b'_{kj} \; a'_{ji} \right]$$

$$= [\textstyle\sum b_{jk} \;\; a_{ij}]$$

$$= [\textstyle\sum a_{ij} \;\; b_{jk}] \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1), (2)-லிருந்து $(AB)' = B' A'$

குறிப்பு :

$$(A_1 A_2 A_3)' = (A_2 A_3)' A_1' = A'_3 A'_2 A'_1$$

$$(A_1 A_2 A_3 \dots \dots A_n)' = A'_n \dots \dots A'_3 A'_2 A'_1$$

மாதிரி 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \text{ எனின்}$$

(i) $(A + B)' = A' + B'$

(ii) $(A - B)' = A' - B'$

(iii) $(AB)' = B'A'$, என நிறுவுக.

(i) $A + B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B') = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$A' + B' =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (A + B)' = A' + B'$$

(ii) $A - B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - B)' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A' - B' =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad (A - B)' = A' - B'$

(iii) $AB =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (AB)' = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 8 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B'A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad (AB)' = B'A'$$

மாதிரி 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ எனின்,

$A'A$, AA' காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A'A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AA' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

2-4. இணையிய அணி (Conjugate of a matrix)

ஓர் அணியின் மூலகங்களில் சில அல்லது அனைத்தும் சிக்கலெண்களெனின், சிக்கலெண்களுக்குப் பதில் அதன் இணைச் சிக்கலெண்களைப் பிரதியிட்டுப் பெறும் அணி இணையிய அணி எனப்படும்

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & 3 & 3+2i \\ 4+5i & 2+3i & 3 \\ 8 & 3-2i & 1-i \end{bmatrix} \text{ எனின்}$$

A-ன் இணையிய அணி

$$\begin{bmatrix} 2+i & 3 & 3-2i \\ 4-5i & 2-3i & 3 \\ 8 & 3+2i & 1+i \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

A அணியின் இணையிய அணி $\overline{A}$ என குறியிடப்படும்.

2-5. தேற்றம்

A அணியினது இணையிய அணியின் இணையிய அணி A ஆகும்.

அதாவது $\overline{\overline{A}} = A$

நிருபணம் :

A -ன் ij ஆவது மூலகம் a_{ij}

$\overline{A}$ -ன் ij ஆவது மூலகம் $\overline{a}_{ij}$

$= a_{ij}$ -ன் இணைச் சிக்கல் எண்

$\overline{\overline{A}}$ -ன் ij ஆவது மூலகம்

$= \overline{a}_{ij}$ -ன் இணைச் சிக்கல் எண்

$= a_{ij} = A$ -ன் ij ஆவது மூலகம்

$$\therefore \quad [\overline{\overline{a_{ij}}}] = [a_{ij}] \text{ அதாவது } \overline{\overline{A}} = A.$$

குறிப்பு : அணித்தரம் மாருது.

2-6. தேற்றம்

A, B என்ற அணிகளது அணித்தரம் சமமெனின்

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

நிரூபணம் :

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}$$
$$B = [b_{ij}]_{m\times n}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

$$\overline{A+B} = [\overline{a_{ij} + b_{ij}}]$$
$$= [\overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}}]$$
$$= [\overline{a_{ij}}] + [\overline{b_{ij}}]$$
$$= \overline{A} + \overline{B}$$

2-7. தேற்றம்

A, B என்பவை முறையே $m \times n$, $n \times p$ அணிகளெனின்,

$$\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$$

நிரூபணம் :

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad B = [b_{ij}]_{m\times p}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{m\times n},\ \overline{B} = [\overline{b_{ij}}]_{n\times p}$$

$$\overline{AB} = \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}\, b_{kj}}\right]_{m\times p}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik} \, \bar{b}_{kj} \right]$$

$$= [\bar{a}_{ij}] \, [\bar{b}_{ij}]$$

$$= \bar{A} \, \bar{B}.$$

மாதிரி 3 :

ஓர் அணியின் இணையிய அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி, அவ்வணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணியின் இணையிய அணியாகும் என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 3 \\ 2+i & 1+i \\ 3 & 3+i \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

என்ற அணியினது நிரை, நிரல் மாற்று அணி

$$A' = \begin{bmatrix} 1-i & 2+i & 3 \\ 3 & 1+i & 3+i \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

A' அணியின் இணையிய அணி

$$(\bar{A}') = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 3 \\ 3 & 1-i & 3-i \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

A அணியின் இணையிய அணி

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 3 \\ 2-i & 1-i \\ 3 & 3-i \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$\bar{A}$ அணியின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி $(\bar{A})'$

$$\therefore \quad \bar{A}' = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i & 3 \\ 3 & 1-i & 3-i \end{bmatrix}$$

எனவே $(\bar{A}') = (\bar{A})'$

2-8. செங்குத்தணிகள் (Orthogonal matrices)

A ஒரு சதுர அணி எனவும், A' அதன் நிரை, நிரல் மாற்று அணி எனவும் கொள்வோம். பின் $A'A = I$ எனின், A அணி **செங்குத்தணி** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ எனின், $A' = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A'A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

எனவே A ஒரு செங்குத்தணி.

(ii) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ எனின்,

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A'A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

எனவே A ஒரு செங்குத்தணி.

2-9. தேற்றம்

A, B இரண்டும் n தரமுடைய செங்குத்தணிகளெனின், AB, BA இரண்டும் செங்குத்தணிகளாகும்.

நிரூபணம் :

A, B இரண்டும் செங்குத்தணிகள்.

$$\therefore\ A'A = I, \qquad B'B = I$$

$$\begin{aligned} \therefore\ (AB)'(AB) &= (B'A')(AB) \\ &= B'(A'A)B \\ &= B'IB \\ &= B'B \\ &= I \end{aligned}$$

இவ்வாறே $(BA)'\,(BA) = I$

எனவே (AB), (BA) இரண்டும் செங்குத்தணிகள்.

மாதிரி 4 :

இரு செங்குத்துக் கோடுகளின் திசை கொசைன்கள் (Direction cosines) (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) எனின்,

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_1c_1 \\ a_1c_1 & b_1c_1 & c_1^2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} a_2^2 & a_2b_2 & a_2c_2 \\ a_2b_2 & b_2^2 & b_2c_2 \\ a_2c_2 & b_2c_2 & c_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ என நிறுவுக.

இரு கோடுகளும் தம்முள் செங்குத்தாதலின்,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_1c_1 \\ a_1c_1 & b_1c_1 & c_1^2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} a_2^2 & a_2b_2 & a_2c_2 \\ a_2b_2 & b_2^2 & b_2c_2 \\ a_2c_2 & b_2c_2 & c_2^2 \end{bmatrix}$$

எனின்,

$$A^2 = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_1c_1 \\ a_1c_1 & b_1c_1 & c_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_1c_1 \\ a_1c_1 & b_1c_1 & c_1^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^2 (a_1^2+b_1^2+c_1^2) & a_1b_1 (a_1^2+b_1^2+c_1^2) & a_1c_1 (a_1^2+b_1^2+c_1^2) \\ a_1b_1 (a_1^2+b_1^2+c_1^2) & b_1^2 (a_1^2+b_1^2+c_1^2) & b_1c_1 (a_1^2+b_{12}+c_1^2) \\ a_1c_1(a_1^2+b_1^2+c_1^2) & b_1c_1 (a_1^2+b_1^2+c_1^2) & c_1^2 (a_1^2+b_1^2+c_1^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_1 & b_1^2 & b_1c_1 \\ a_1c_1 & b_1c_1 & c_1^2 \end{bmatrix} \quad (\therefore \quad a_1^2+b_1^2+c_1^2=1)$$

$$\therefore A^2B = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1b_1 & a_1c_1 \\ a_1b_3 & b_1^2 & b_1c_1 \\ a^1c_1 & b_1c_1 & c_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2^3 & a_2b_2 & a_2c_2 \\ a_2b_2 & b_2^2 & b_2c_2 \\ a_2c_2 & b_2c_2 & c_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) & a_1b_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) & a_1c_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) \\ b_1a_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) & b_1b_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) & b_1c_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) \\ c_1a_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) & c_1b_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) & c_1c_2 (a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1a_2(0) & a_1b_2(0) & a_1c_2(0) \\ b_1a_2(0) & b_1b_2(0) & b_1c_2(0) \\ c_1a_2(0) & c_1b_2(0) & c_1c_2(0) \end{bmatrix} \quad (\because \ a_1a_2+b_1b_2 + c_1c_2=0)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2-10. பூச்சிய கோவை அணி (Singular matrix)

$|A| = 0$ எனின், A பூச்சிய கோவை அணி (Singular matrix) எனவும், $|A| \neq 0$ எனின், A பூச்சியமில் கோவை அணி (Non-Singular matrix) எனவும் சொல்லப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ எனின் } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

எனவே, A ஒரு பூச்சிய கோவை அணி.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ எனின் } |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

எனவே, B ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணியாகும்.

2-11. துணை அணி (அல்லது) சேர்ப்பு அணி (Adjoint of a matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

என்ற சதுர அணியின் அணிக்கோவை

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$|A|$ -ன் a_{ij} மூலகத்தின் இணைக் காரணி (Cofactor) A_{ij} எனின்,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையின் நிரை, நிரல் மாற்று அணி A அணியின் துணை அணி எனப்படும். இது 'துணை அணி A' எனக் குறிப்பிடப் படும்.

அதாவது A அணியின் துணை அணி A,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 5 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{எனின்,}$$

துணை அணி A (adj. A) காண்க.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

a_{ij} மூலகத்தின் இணைக் காரணி A_{ij}

அல்லது a_{11}, a_{12}, a_{13} ......மூலகங்களின் இணைக்காரணிகள் முறையே A_{11}, A_{12}, A_{13} ... ..

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

∴ $|A|$ன் மூலகங்கள் தம் இணைக்காரணிகளால்

அமையும் அணி $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

அல்லது $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

இதன் நிரை, நிரல் மாற்று அணி A அணியின் துணை அணி யாகும்.

$$\therefore \text{ துணை அணி } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

மாதிரி 6 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ எனின்

துணை அணி A $(adj\ A)$ காண்க.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots \ldots$ முதலியவை $|A|$-ன் $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \ldots$ மூலகங்களின் இணைக்காரணிகள்.

எனின்,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 0 = 15, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -[6-12] = 6$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

எனவே $|A|$-ன் இணைக்காரணிகளாலமையும்

$$\text{அணி} \quad \begin{bmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 6 & -3 & 0 \\ -15 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

A அணியின் துணை அணி இணைக்காரணிகளால் அமையும் நிரை, நிரல் மாற்று அணியாகும்.

எனவே A அணியின் துணை அணி

$$\text{துணை அணி } A = \begin{bmatrix} 15 & 6 & -15 \\ 0 & -3 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2-12. தேற்றம்

A ஒரு சதுர அணி எனின்,

A (துணை A) = (துணை A). $A = |A| I.$

நிரூபணம் :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ எனின்}$$

$$\text{துணை } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ A (துணை A) =

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I$$

(துணை A) A =

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A|\, I$$

$\therefore$ A (துணை A) = (துணை A) A = $|A|\, I$

மாதிரி 7 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ எனின்,

A (துணை A) $=$ (துணை A) $A = |A|\, I$ என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad |A| = 4$$

$|A|$-ன் இணைக்காரணிகள் முறையே

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

அதாவது,

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = 1, \quad A_{13} = -1;$$
$$A_{21} = 1, \quad A_{22} = 3, \quad A_{23} = 1;$$
$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = +1, \quad A_{33} = 3.$$

$\therefore$ A-ன் இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணி

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

எனவே, துணை $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A\,(\text{துணை } A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I$$

$$(\text{துணை } A) \,.\, A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\, I$$

எனவே $A\,(\text{துணை } A) = (\text{துணை } A)\, A = |A|\, I = 4\, I.$

2-13. நேரொதிர் அணி (Inverse of a matrix)

A ஒரு சதுர அணி எனக் கொள்வோம். $AB = BA = I$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் B என்ற ஓர் அணி இருக்குமெனின், B அணி A அணியின் நேரொதிர் அணி (Inverse of a matrix) எனப்படும்.

இது A^{-1} எனக் குறியிடப்படும்.

A. துணை $A = |A|\, I$ என சென்ற பத்தியில் கண்டோம்.

அதாவது $\dfrac{A.\,(\text{துணை } A)}{|A|} = I$

எனவே $A^{-1} = \dfrac{\text{துணை } A}{|A|}, \ (|A| \neq 0)$

குறிப்பு :

சதுர அணிகளுக்கு மட்டுமே நேரெதிர் அணிகள் உண்டு.

மாதிரி 8 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனின் A-ன் நேரெதிர் அணி காண்க.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(4-3) - 2\,(6-3) + 1\,(3-2)$$
$$= 1 - 6 + 1 = -4 \neq 0.$$

A அணியின் துணை அணி $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{துணை } A}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & +\frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

2-14. தேற்றம்

ஒரு சதுர அணி A-க்கு நேரெதிர் அணி இருக்கத் தேவை யானதும், அவசியமானதுமான கட்டுப்பாடு $|A| \neq 0$

நிரூபணம் :

கட்டுப்பாடு அவசியம் :

A அணியின் நேரெதிர் அணி B எனக் கொள்வோம்.

பின், $AB = I$

$\therefore \quad |AB| = |I| = 1$

அதாவது $|A| \ |B| = 1$

எனவே $|A| \neq 0$

ஆகவே $|A| \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாடு அவசியம்.

கட்டுப்பாடு போதுமானது :

$|A| \neq 0$ எனும், B எனும் ஓர் அணியை $B = \dfrac{\text{துணை } A}{|A|}$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் வரையறுப்போம்.

பின், $AB = \dfrac{(\text{துணை } A)\, A}{|A|} = \dfrac{1}{|A|}\, |A|\, I = I$

இவ்வாறே $BA = \dfrac{(\text{துணை } A)\, A}{|A|} = |A|\, I = I$

$\therefore \quad AB = BA = I$

எனவே B அணி, A அணியின் நேரெதிர் அணியாகும்.

2-15. தேற்றம்

ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணிக்கு ஒரே ஒரு நேரெதிர் அணிதான் உண்டு.

நிருபணம் :

A ஒரு சதுர பூச்சியமில் கோவை அணி எனக் கொள்வோம். A அணிக்கு ஒரே ஒரு நேரெதிர் அணிதான் உண்டு.

முடியுமெனின், A அணிக்கு இரு நேரெதிர் அணிகள் உண்டு எனக் கொள்வோம்.

அவை B, C எனின்

$$B, A = BA = I$$

$$AC = CA = I$$

(அதாவது) $AB = AC$

எனவே, $CAB = C\,(AB) = CI = C$

$$CAB = (CA)\, B = IB = B$$

எனவே, $B = C$

ஆகவே, A அணிக்கு ஒரே ஒரு நேரெதிர் அணிதான் உண்டு.

மாதிரி 9 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

நேரெதிர் அணி $$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

எனவே A-ன் நேரெதிர் அணி B ஆகும்.

மாதிரி 10 :

பின்வரும் அணியின் துணை அணியையும் (Adjoint matrix), நேரெதிர் அணியையும் (Inverse matrix) காண்க.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

எனவே A ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணியாகும்.

A_{11}, A_{12}, A_{13}, ... முதலியவை $|A|$-ன் a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... மூலகங்கள் தம் இணைக்காரணிகளெனின்,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

எனவே $|A|$-ன் மூலகங்கள் தம் இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணி

$$\begin{bmatrix} -1 & -8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A-ன் துணை அணி $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 6 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

A அணியின் நேரெதிர் அணி $= \dfrac{\text{துணை } A}{|A|}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2-16. தேற்றம் :

A ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி, $AB = AC$ எனின் $B = C$.

நிரூபணம் :

$|A| \neq 0$ எனவே A அணிக்கு நேரெதிர் அணி A^{-1} உண்டு.

$$AB = AC$$

இரு பக்கமும் A^{-1} ஆல் பெருக்க

$$A^{-1} AB = A^{-1} AC$$

$$IB = IC$$

$$\therefore \quad B = C.$$

2-17. தேற்றம் :

A, B என்பவை ஒரே அணித்தரம் கொண்ட இரு பூச்சியமில் கோவை அணிகளெனின்

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

நிரூபணம் :

$$|A| \neq 0, \quad |B| \neq 0.$$

எனவே இரு அணிகளுக்கும் நேரெதிர் அணிகள் A^{-1}, B^{-1} உண்டு.

$$\therefore \quad AA^{-1} = I, \; BB^{-1} = I$$

AB அணியின் நேரெதிர் அணி C எனக் கொள்வோம். $C = B^{-1} A^{-1}$ எனின்

$$\begin{aligned} C(AB) &= (B^{-1} A^{-1})(AB) \\ &= B^{-1}(A^{-1} A) B \\ &= B^{-1} I B \\ &= B^{-1} B = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB) C &= (AB)(B^{-1} A^{-1}) \\ &= A(BB^{-1}) A^{-1} \\ &= AI A^{-1} \\ &= AA^{-1} = I \end{aligned}$$

எனவே $C(AB) = (AB) C = I$

$\therefore$ AB அணியின் நேரெதிர் அணி C (அதாவது) $B^{-1} A^{-1}$

அதாவது $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

2-18. தேற்றம் :

A ஒரு சதுர பூச்சிய மில் கோவை அணி எனின்,

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

நிரூபணம் :

A ஒரு சதுர பூச்சியமில் கோவை அணி ஆதலின் $|A| \neq 0$

மேலும் $|A'| \neq 0 \quad [\because |A| = |A'|]$

எனவே A, A' இரண்டிற்கும் நேரெதிர் அணிகள் உண்டு. அவை A^{-1}, $(A^{-})'$ என்போம்.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

எனவே $(A A^{-1})' = (A^{-1} A)' = I'$

$\therefore \quad (A^{-1})' A' = A'(A^{-1})' = I \quad [\because I' = I]$

ஆகவே A' -ன் நேரெதிர் அணி $(A^{-1})'$.

ஆனல் A' -ன் நேரெதிர் அணி $(A')^{-1}$

$\therefore \quad (A')^{-1} = (A^{-1})'$

மாதிரி 11 :

A ஒரு சதுர பூச்சியமில் கோவை அணி, m ஒரு கூட்டு முழு எண் எனின், $A^{-m} = (A^{-1})^m$ என நிறுவுக.

$$(A^m)^{-1} = (A \cdot A \cdot A \ldots\ldots m \text{ காரணிகள்})^{-1}$$
$$= A^{-1}.A^{-1}.A^{-1} \ldots\ldots m \text{ காரணிகள்}$$
$$= (A^{-1})^m.$$

ஆனல் $A^{-m} = (A^m)^{-1}$

$\therefore \quad A^{-m} = (A^{-1})^m$

அல்லது $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

2-19. பூச்சியமில் கோவை சமமூலை வரை அணியின் நேரெதிர் அணி (Inverse of a non-singular diagonal matrix)

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3} \end{bmatrix}$$

என்ற அணியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$AB = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

மேலும் $AB = BA = I$

எனவே,

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \text{ அணியின் நேரெதிர் அணி } \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3} \end{bmatrix}.$$

மாதிரி 12 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ அணியின் நேரெதிர் அணி } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

என் நிறுவுக.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எனவே A-ன் நேரெதிர் அணி B ஆகும்.

2-20. நேரெதிர் அணியின் மூலம் தீர்வு காணுதல் (Finding solution with the help of Inverse)

பின்வரும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கருதுவோம்.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \dots + a_{3n} x_n = b_3$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$ எனின்

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

என்று எழுதலாம்.

(அதாவது) இச் சமன்பாடுகள் பின்வரும் அணிச்சமன்பாடுக்குச் சமம்.

$$AX = B$$

$|A| \neq 0$ எனின், A அணிக்கு நேரெதிர் அணி உண்டு.

$AX = B$ என்ற சமன்பாட்டை A^{-1} ஆல் பெருக்க,

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

அதாவது $X = A^{-1}B$

அதாவது $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$

மாதிரி 13 :

பின்வரும் ஒரு படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x - 3y + 2z = 2$$

$$3x + y + 2z = 11.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}B.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-6-2) - 2(4-6) + 1(2+9)$$

$$= -8 + 4 + 11 = 7 \neq 0.$$

$|A|$-ன் இணைக்காரணிகள் (Cofactors)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

∴ $|A|$ -ன் இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணி

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & 11 \\ -3 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \text{துணை } A = \begin{bmatrix} -8 & -3 & -7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{துணை } A}{|A|} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}$$

எனவே $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -8 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 11 & 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -64 & -6 & +77 \\ 16 & -2 & +0 \\ 88 & +10 & -77 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x = 1, \; y = 2, \; z = 3.$

பயிற்சி 2

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்

$(AB)' = B'A'$ என நிறுவுக.

(2) பின்வரும் அணிகளது துணை அணிகள் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 7 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

(3) பின்வரும் அணிகளது நேரெதிர் அணிகள் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 7 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) அணி முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

(i)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x - 7y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10 \\ -x + y - z &= -2 \\ 3x - 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} 12x + 7y - 4z &= 4 \\ 7x - 4y + 2z &= 11 \\ 6x + 11y + 3z &= 12. \end{aligned}$$

(5) A ஒரு $n \times n$ அணி எனின், துணை அணி A-ன் துணை அணி (adjoint of adj A), $|A|^{n-2} A$ என நிறுவுக.

(6) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனின், $A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = 0$ என நிறுவுக.

(7) $$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ \tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\theta}{2} \\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

என நிறுவுக.

(8) A ஒரு $n \times n$ சமச்சீரணி (Symmetric matrix), B ஒரு $n \times n$ எதிர் சீரணி (Skew-symmetric matrix), $(A+B)$ ஒரு பூச்சியமில் அணிக்கோவை (Non-singular matrix),

$C = (A+B)^{-1}(A-B)$ எனின்

(i) $C'(A+B)C = A+B$

(ii) $C'(A-B)C = A-B$

(iii) $C'AC = A$, என நிறுவுக.

(9) $$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

A ஒரு $n \times n$ அணி

$A'E = EA' = bE,\ A'A = (b-c)\, I_n + CE,\ b > c > 0$

எனின்

$A'A = AA'$ என நிறுவுக.

(10) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனின்

$A^3 + 3A^2 - 2I$ காண்க.

(11) A, B முறையே $m \times n,\ n \times p$ அணிகளெனின்,

$(AB)' = B'A'$ என நிறுவுக.

(12) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ அணியின் நேரெதிர் அணி காண்க.

(13) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ அணியின் நேரெதிர் அணி

B எனின் $(A+B)^2 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என நிறுவுக.

(14) $\begin{bmatrix} 14 & 3 & -2 \\ 6 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & -7 \end{bmatrix}$ அணியின்

நேரெதிர் அணி காண்க.

(15) அணிமுறையில் தீர்வு காண்க.

$$2x + 3y + z = 9$$
$$x + 2y + 3z = 6$$
$$3x + y + 2z = 8$$

விடைகள்

(2) (i) $\begin{bmatrix} -34 & 10 & 62 \\ 10 & 0 & -30 \\ 31 & -15 & 58 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 25 & -10 & -15 \\ -10 & 4 & 11 \\ -15 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

(3) (i) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} \frac{34}{50} & -\frac{1}{5} & -\frac{62}{50} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{31}{50} & \frac{3}{10} & \frac{58}{50} \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$

4. (i) $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$

(ii) $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$

(iii) $x = 1,\ y = 0,\ z = 2.$

(12) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(14) $-\frac{1}{654}\begin{bmatrix} -54 & 17 & 13 \\ 42 & -98 & 2 \\ 12 & -28 & 94 \end{bmatrix}$

(15) $x = \frac{35}{18},\quad y = \frac{29}{18},\quad z = \frac{5}{18}.$

3. அணி அளவை

(Rank of a Matrix)

3-1. சிற்றணிக்கோவை (Minor of a matrix)

ஓர் அணி A-ல் r நிரைகள், r நிரல்கள் தவிர்த்து மற்ற நிரைகளையும் நிரல்களையும் நீக்கக் கிடைக்கும் $r \times r$ அணிக்கோவை, A அணியின் சிற்றணிக்கோவை (Minor of a matrix) எனப்படும்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ முதலியவை}$$

A அணியின் சிற்றணிக் கோவைகளாகும். இவற்றின் ஒவ்வொன்றின் தரமும் 2 ஆகும்.

மாதிரி 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ எனின்}$$

மீப்பெரு தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகள் காண்க.

முதலாவது, இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது நிரல்களை நீக்கிக் கிடைக்கப்பெறும் கீழணிகள் (Sub-matrices) முறையே

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

எனவே, சிற்றணிக் கோவைகள்

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

இவை ஒவ்வொன்றினது தரமும் 3 ஆகும்.

3-2. அணி அளவை (Rank of a Matrix)

ஒரு சதுர அணி A-ல் r தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகளில் (Minors of a determinant) யாதேனும் ஒன்று பூச்சியமில் அணிக் கோவையாகவும், மற்ற எல்லா $(r + 1)$ தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகளும் பூச்சியமாகவும் இருப்பின், A-ன் அணி அளவை r ஆகும். இது $\rho(A)$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

n தரமுடைய A எனும் சதுர அணியில், $|A| \neq 0$ எனின், A-ன் அணி அளவை n ஆகும். $|A| = 0$ எனின் A-ன் அணி அளவை $r < n$. முற்றும் பூச்சிய அணியின் அணி அளவை பூச்சியமாகும்.

மாதிரி 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ எனின்,

A-ன் அணி அளவைக் காண்க.

A ஒரு 3×3 சதுர அணியாகும்.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(4-1) - 2(6-2) + 3(3-4)$$
$$= 3 - 8 - 3 = -8 \neq 0.$$

$\therefore$ A-ன் அணி அளவை 3.

அதாவது $\rho(A) = 3$.

மாதிரி 3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ எனின்,

A-ன் அணி அளவைக் காண்க.

A ஒரு 3×3 சதுர அணியாகும்.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 2(0-2) + 3(3-4)$$
$$= -1 + 4 - 3 = 0.$$

அதாவது $|A| = 0$ $\quad \therefore \rho(A) < 3$.

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ என்பது A அணியின் மீப்பெரு சிற்றணிக் கோவையாகும். இதன் தரம் 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0$$

எனவே, A-ன் அணி அளவை 2.

மாதிரி 4 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ எனின், $\rho(A)$ காண்க.

A அணியின் மீப்பெரு தரமுடைய சிற்றணிக் கோவைகள்

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2+6-4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1-3+2=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+4-6=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2+0-2=0.$$

(அதாவது) மீப்பெரு சிற்றணிக் கோவைகள் அனைத்தும் பூச்சியமாகும். இவை ஒவ்வொன்றின் தரமும் 3 ஆகும்.

அடுத்த தரம் 2 உள்ள சிற்றணிக் கோவைகளில் ஒன்று

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

எனவே, A அணியின் அணி அளவை 2.

மாதிரி 5 :

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$-ன் அணி அளவைக் காண்க.

கொடுத்துள்ள அணியின் தரம் 2 உள்ள சிற்றணிக் கோவைகள் அனைத்தும் பூச்சியமாதலின், அணி அளவை 1 ஆகும்.

மாதிரி 6 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ எனின், $\rho(A)$ காண்க.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0.$$

$$\therefore \quad \rho(A) = 2.$$

3-3. தொடக்க மாற்றங்கள் (Elementary Transformations)

பின் வரும் மூன்று மாற்றங்களும் தொடக்க மாற்றங்கள் எனப்படும் :

(1) எவையேனும் இரு நிரைகளை அல்லது நிரல்களை அவற்றிற்குள் இடம் மாற்றுதல்.

(2) எவையேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரலின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றையும் பூச்சியமில் எண்ணால் (non-zero constant) பெருக்குதல்.

(3) ஏதேனும் ஒரு நிரை அல்லது நிரலின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றையும் பூச்சியமில் எண்ணால் பெருக்கிப் பிறிதொரு நிரை அல்லது நிரலின் ஒத்த உறுப்புகளுடன் கூட்டுதல்.

3-4. குறியீடுகள்

ஓர் அணியில் i, j ஆவது நிரைகள் முறையே j, i ஆவது நிரைகளாக இடம் மாறினால் அந்த மாற்றம் R_{ij} எனவும்; i, j ஆவது நிரல்கள் முறையே j, i ஆவது நிரல்களாக இடம் மாறினால், அந்த மாற்றம் C_{ij} எனவும், குறியிடப்பெறும்.

i ஆவது நிரையிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் பூச்சியமில் எண் K ஆல் பெருக்க KR_i எனவும், i ஆவது நிரலிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் பூச்சியமில் எண் K ஆல் பெருக்க KC_i எனவும் குறியிடப்படும்.

i ஆவது நிரையிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் K ஆல் பெருக்கிப் பின் j ஆவது நிரையிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்ட $(KR_i + R_j)$ எனக் குறியிடப்படும். இவ்வாறே $(KC_i + C_j)$ என்பது i ஆவது நிரலிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் K ஆல் பெருக்கி j ஆவது நிரலிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டுவதைக் குறிக்கும்.

3-5. இணைமாற்று அணிகள் (Equivalent matrices)

ஒரு $m \times n$ அணி A-லிருந்து தொடக்க மாற்றங்களால் கிடைக்கப் பெறும் B என்ற $m \times n$ அணி, A-ன் இணை மாற்று அணி எனப்படும்.

இது $B \sim A$ என குறிக்கப் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{R_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = B$$

இங்கு இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரைகள் முறையே மூன்றாவது, இரண்டாவது நிரைகளாக மாற்றப்பட்டுள்ளது.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \underset{2C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = B \qquad \text{(ii)}$$

இங்கு இரண்டாவது நிரல் இரண்டால் பெருக்கப்பட்டுள்ளது.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{C_3+3C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = B \qquad \text{(iii)}$$

இங்கு இரண்டாவது நிரலின் மூலகங்களை மூன்றால் பெருக்கி மூன்றாவது நிரலின் ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டப்பட்டுள்ளது.

3-6. தொடக்க மாற்றங்களால் ஓர் அணியின் அணி அளவை மாறாது.

ஓர் அணியில் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் இடம் மாறினால், அணியினது அணிக் கோவையின் குறி மாறும். மேலும், ஓர் அணியின் யாதாவதொரு நிரை அல்லது நிரலை ஒரு பூச்சியமில் எண் K ஆல் பெருக்க அணிக் கோவையும் K ஆல் பெருக்கப்படும். எனவே, முதல் இரு தொடக்க மாற்றங்கள் அணியின் அளவை மாற்றாது எனத் தெளிவாகிறது. மூன்றாவது மாற்றமும் அணி அளவை மாற்றாது என நிறுவலாம்.

மாதிரி 7 :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

அணிஅளவைக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

A ஒரு 3×3 அணியாகும்.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad R_3 + R_1$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

எனவே $\bar{A}$ அணியின் அளவை $r < 3$.

அடுத்து தரம் 2 கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளைக் கவனிப் போம். அவை,

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 ; \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 ; \quad \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0 ; \quad \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

தரம் 2 கொண்ட எல்லா சிற்றணிக் கோவைகளும் பூச்சிய மாதலின்,

A அணியின் அணி அளவை $\rho(A) = 1$.

மாதிரி 8 :

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$ -ன் அணி அளவைக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{vmatrix}$$

$$R_3 - R_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 6 & 1 & 3 & 8 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

அடுத்துத் தரம் 3 உள்ள சிற்றணிக் கோவைகளைப் பரிசீலிப்போம்.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 10 & 3 & 9 \end{vmatrix} R_3 - R_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 10 & 3 & 9 \\ 16 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4(46 - 36) - 2(120 - 144) + 6(40 - 48) = 48 - 48 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 10 & 3 & 9 \\ 16 & 4 & 12 \end{vmatrix} R_1 + R_2 = \begin{vmatrix} 16 & 4 & 12 \\ 10 & 3 & 9 \\ 16 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 16 & 4 & 12 \end{vmatrix} R_3 - 2R_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

இவ்வாறே தரம் 3 உள்ள மற்ற சிற்றணிக் கோவைகளும் பூச்சியம் என நிறுவலாம்.

அடுத்து, தரம் 2 உள்ள சிற்றணிக் கோவைகளை எடுத்துக் கொள்ளின்,

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 48 = -51 \neq 0.$$

எனவே A அணியின் அணி அளவை 2.

3-7. அணியின் நியம வடிவம் (Canonical form or Normal form)

எந்த ஒரு $m \times n$ அணியும் பின்வரும் வடிவத்தில் தொடக்க மாற்றுங்களால் ஒடுக்கப்படக்கூடும்.

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ [I_r, 0], \ \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \ [I_r]$$

இது அணியின் நியமன வடிவம் எனக் கூறப்படும்.

ஓர் அணி A நியமன வடிவில் ஒடுக்கப்படின், பின் A-ன் அணி அளவை I_r ஆகும். A எனும் ஒரு $m \times n$ அணியின் அளவை r எனின் $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் P, Q எனும் இரு அணிகள் இருக்கும். P, Q இரண்டும் பூச்சியமில் அணிகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

ஒரு 3×4 அணியில்

$$[I_3, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஒரு 4×3 அணியில்

$$\begin{bmatrix} I_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

மாதிரி 9: $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$-ன் அணி அளவைக் காண்க

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_1,\ \frac{1}{2}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_2 + C_1,\ C_4 - 3C_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2-2R_1,\ R_3-R_1,\ R_4-R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_2 - C_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-\frac{1}{2} C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_{34}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4 + C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4 - 5C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே, A-ன் அணி அளவை 3.

(அதாவது) $\rho(A) = 3$.

மாதிரி 10 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

எனின் $(A + B)$-ன் அணி அளவையையும், AB-ன் அணி அளவையையும் காண்க.

$$\text{(i)}\quad A+B=\begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 & -1-1 \\ 2+6 & -3+12 & 4+6 \\ 3+5 & -2+10 & 3+5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 8 & 9 & 10 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} = C \text{ (என்க).}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 8 & 9 & 10 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_{31}}{\sim}\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{8}R_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_2-C_1,\ C_3-C_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2-3R_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3+R_2}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}C_3}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_3-C_2}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே C அணியின் அளவை 2.

அதாவது $\rho\ (A + B) = 2$

$$\text{(ii)}\quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே AB-ன் அணி அளவை பூச்சியம்.

மாதிரி 11:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$ -ன் அணி அளவைக் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3 - R_3,\ R_4 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\sim}{R_4 - 2R_2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\sim}{R_{23}}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\sim}{\tfrac{1}{2}C_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\sim}{C_2 + C_1,\ C_3 - 3C_1,\ C_4 - 4C_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\sim}{C_2 - 3C_4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_4-4C_3\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A=\begin{bmatrix}I_3&0\\0&0\end{bmatrix}$$

எனவே A-ன் அணி அளவை 3.

அதாவது $\rho(A)=3$.

மாதிரி 12 :

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\3&1&1\end{bmatrix}$$ எனின்,

$$BAC=\begin{bmatrix}I_3&0\\0&0\end{bmatrix}$$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

அணிகள் B, C ஐக் காண்க. A-ன் அணி அளவை என்ன ?

$$A=I\,A\,I$$

அதாவது $$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\3&1&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

இடப் பக்கமுள்ள அணிக்குச் செய்யும் ஒவ்வொரு தொடக்க நிரை மாற்றமும் வலப் பக்கமுள்ள இடது காரணிக்குச் செய்ய வேண்டும். இவ்வாறே இடப் பக்கமுள்ள அணிக்கு செய்யும் ஒவ்வொரு தொடக்க நிரல் மாற்றமும் வலப் பக்கமுள்ள வலது காரணிக்குச் செய்ய வேண்டும்.

$$R_2 - R_1,\ \ R_3 - 3R_1,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 - C_1,\ \ C_3 - C_1,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\left(-\frac{1}{2}\right) R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 - C_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BAC$$

எனவே, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

மேலும் A-ன் அணி அளவை 2,

மாதிரி 13 :

தொடக்க மாற்றங்களினால் பின்வரும் அணியின் நேரெதிர் காண்க.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

முதலில் $A = I\,A$ என எழுத

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 - R_1, \quad R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 - 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

அதாவது $I = BA$

$\therefore \quad B = A^{-1}$

எனவே, A-ன் நேரெதிர் அணி

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(அதாவது)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ எனின், } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

மாதிரி 14 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ -ன் நேரெதிர் அணி காண்க.

$$A = I\,A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 - 3R_1, \quad R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 - 3R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 - 2R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$-\frac{1}{4} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_3 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_1 - R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} A$$

அதாவது $I = BA$

$\therefore \quad B = A^{-1}$

எனவே A-ன் நேரெதிர் அணி $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 3

(1) பின் வரும் அணிகளின் அணி அளவைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & 417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ எனின்,

A, B, $A+B$, AB, BA அணிகளது அணி அளவைகள் காண்க.

(3) கீழ்க்காணும் அணிகளை நியம வடிவில் (Normal form) ஒடுக்கி அதன் அணி அளவைக் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 7 & -14 & -5 & 6 & 2 \\ 17 & 1 & -4 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{bmatrix}$

$$\text{(iii)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

(4) பின்வரும் அணிகள் இணைமாற்று அணிகள் (Equivalent matrices) அல்ல என நிறுவுக.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ எனின்,

$PAQ = I$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் P, Q அணிகளைக் காண்க.

விடைகள்

(1) (i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (v) 3 (vi) 3 (vii) 4 (viii) 2 (ix) 3.

(2) $\rho(A) = 1$; $\rho(B) = 1$; $\rho(A + B) = 2$; $\rho(AB) = 1$; $\rho(BA) = 1$.

(3) (i) 2 (ii) 3 (iii) 2.

4. ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

(Solutions of Simultaneous Equations)

4–1. களங்கள் (Fields)

மெய் அல்லது சிக்கலெண்களின் தொகுதியை F எனக் குறிப்பிடுவோம். பின், இவற்றிற்கு

(1) கூட்டல் பரிமாற்று விதி

(2) கூட்டல் சேர்ப்பு விதி

(3) பெருக்கல் பரிமாற்று விதி

(4) பெருக்கல் சேர்ப்பு விதி

(5) பங்கீட்டு விதி

முதலியவை பொருந்தும்.

(அதாவது) F-ல் உள்ள அனைத்து எண்களுக்கும்

(1) $a+b = b+a$

(2) $a+(b+c) = (a+b)+c$

(3) $ab = ba$

(4) $a(bc) = (ab)c$

(5) $a(b+c) = ab+ac$

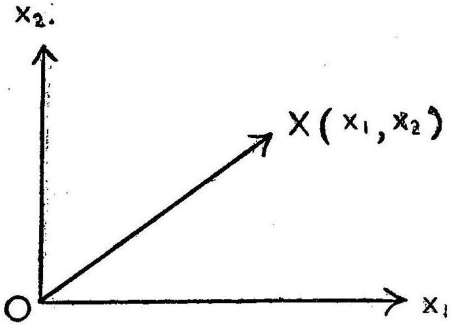
என்ற விதிகள் பொருந்தும்.

மேலும் F-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எண் a-க்கும் $a+(-a) = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $-a$ என்ற ஓர் எண்ணும், $aa^{-1} = 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் a^{-1} (அல்லது) $\frac{1}{a}$ என்ற ஓர் எண்ணும் F-ல் இருக்கும்.

மீண்டும் F-ல் 0, 1 என்ற எண்கள் $a+0=a$, $a(1)=a$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கும்.

4-2. வெக்டர்கள் (Vectors)

வரிசைப்பட்ட இரு மெய்யெண்கள் (x_1, x_2), ஒரு தளத்தில் X எனும் புள்ளியைக் குறிக்கும். அவ் வெண்கள் $[x_1, x_2]$ என எழுதப் பெறின், அவை இரு பரிமாண வெக்டர் (Two Dimensional Vector) (அல்லது) 2—வெக்டர் OX ஐக் குறிக்கும்.



படம் 1.

படத்தில், $\overrightarrow{OX} = [x_1, x_2]$.

(அதாவது) X புள்ளியின் நிலை வெக்டர்

$X = [x_1, x_2]$.

4-3. n- வெக்டர் (n-Vector)

யாதேனும் ஒரு வரிசைப்பட்ட n எண்கள் (Ordered n-tuple of numbers) ஒரு பரிமாண வெக்டர் (அல்லது) n-வெக்டர் எனப் படும்.

இந்த n எண்களும் வெக்டரின் கூறுகள் (அல்லது) மூலகங்கள் எனப்படும்.

$\therefore$ $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ஒரு n-வெக்டர். இந்த n எண்களை யும் கிடையாகவோ (அல்லது) நிலைக்குத்தாகவோ எழுதலாம்.

கிடையாக எழுதப்படும் எண்கள் ஒரு நிரை வெக்டர் (Row Vector) எனவும், நிலைக்குத்தாக எழுதப்படும் எண்கள் ஒரு நிரல் வெக்டர் (Column Vector) எனவும் கூறப்படும்.

$X = [x_1, x_2, \ldots x_n]$ ஒரு $1 \times n$ அணியாகும்.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$ ஒரு $n \times 1$ அணியாகும்.

ஒரு வெக்டரின் கூறுகள் களம் F-ல் இருப்பின், அவ் வெக்டர் களம் F-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கூறுகிறோம். மெய் யெண்கள் கொண்ட களத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் மெய்யான வெக்டர் (Real Vector) எனவும், சிக்கலெண்கள் கொண்ட களத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் சிக்கல் வெக்டர் (Complex Vector) எனவும் கூறலாம்.

கூறுகள் அனைத்தும் பூச்சியமெனின், அவ் வெக்டர் பூச்சிய வெக்டர் (Null Vector or Zero Vector) எனப்படும். அது 0 எனக் குறியிடப்படுகிறது.

எனவே, ஓர் அணியை நிரை வெக்டர்களின் தொகுதி யாகவோ அல்லது நிரல் வெக்டர்களின் தொகுதியாகவோ கருதலாம். ஆகவே, ஒரு $m \times n$ அணியில் m நிரை வெக்டர்கள் அல்லது n நிரல் வெக்டர்கள் உண்டு.

4-4. n - வெக்டர் வெளி (n-Vector Space)

களம் F-ல் வரையறுக்கப்பட்ட n-வெக்டர்களின் தொகுதி. F-ல் n-வெக்டர் வெளி எனப்படும்.

4-5. வெக்டர் கூட்டல் (Vector Addition)

சமதரம் கொண்ட இரு வெக்டர்களின் கூட்டல், ஒத்த கூறுகளைக் கூட்டப்பெறும் வெக்டர் ஆகும்,

எடுத்துக்காட்டாக,

$$X_1 = [1, 2, 3]$$

$$X_2 = [2, 4, 5]$$ எனின்,

$$X_1 + X_2 = [1, 2, 3] + [2, 4, 5] = [3, 6, 8]$$

$$2X_1 - 3X_2 = 2[1, 2, 3] - 3[2, 4, 5]$$
$$= [2, 4, 6] - [6, 12, 15]$$
$$= [-4, -8, -9]$$

$X_3 = [0, 0, -1]$ எனின்,

$$2X_1 - X_2 + X_3 = 2[1, 2, 3] - [2, 4, 5] + [0, 0, -1]$$
$$= [2, 4, 6] - [2, 4, 5] + [0, 0, -1]$$
$$= [0, 0, 0] = 0.$$

4-6. வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சார்பு (Linear dependence of Vectors)

$$X_1 = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}]$$
$$X_2 = [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}]$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$X_m = [x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}]$ என்பவை ஒரு தொகுதி வெக்டர்கள் என்போம்.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ என்பவை முற்றும் பூச்சியமில் (not all zero) எண்கள் எனக்கொள்வோம். பின்,

$$\lambda_1 X_1, + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m = 0$$

எனும் சமன்பாட்டில் அவ் வெக்டர்கள் பொருந்துமெனின், அவை ஒருபடிச் சார்புடைய வெக்டர்கள் எனப்படும்.

அவ்வாறு அவ் வெக்டர்கள் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் பொருந்தாவிடின், அவை ஒருபடிச் சார்பற்ற (Linearly independent) வெக்டர்கள் எனப்படும்.

அதாவது,

$$X_1, X_2, \ldots, X_m$$

ஒரு படிச் சார்பற்ற வெக்டர்களெனின்,

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m = 0$$

எனும் சமன்பாட்டில்,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$$

ஆகும்.

மாதிரி 1 :

வெக்டர்கள் [1, 1, 1], [1, 2, 3] [2, 3, 8] ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிறுவுக.

$$X_1 = [1, 1, 1]$$
$$X_2 = [1, 2, 3]$$
$$X_3 = [2, 3, 8]$$

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$ எனின்,

$$\lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (1, 2, 3) + \lambda_3 (2, 3, 8) = 0.$$

$$\therefore \quad \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0$$

இதிலிருந்து $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0. \quad \lambda_3 = 0.$

எனவே, (1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 3, 8) வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகும்.

மாதிரி 2 :

[1, 2, 3], [2, 3, 6], [3, 4, 9]

எனும் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை என நிறுவுக.

$$X_1 = [1, 2, 3]$$
$$X_2 = [2, 3, 6]$$
$$X_3 = [3, 4, 9]$$

$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$ எனின்

$$\lambda_1 [1, 2, 3] + \lambda_2 [2, 3, 6] + \lambda_3 [3, 4, 9] = 0$$

$$\therefore \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$
$$3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0$$

இதிலிருந்து, $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 1$

எனவே, வெக்டர்கள் மூன்றும் ஒரு படிச் சார்புடையவை.

4-7. தேற்றம்

$$X_1 = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}]$$
$$X_2 = [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}]$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$X_m = [x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}]$$

என்ற m வெக்டர்களால் அமையும் A எனும் ஒரு $m \times n$ அணி $(m < n)$ யின் அணி அளவை r எனின் $(r < m)$, A அணியில் ஒரு படிச் சார்பற்ற வெக்டர்களின் எண்ணிக்கை r ஆகும். எஞ்சிய $(m - r)$ வெக்டர்கள், அந்த r வெக்டர்களின் ஒரு படிச் சேர்மானமுடையதாகும்.

நிரூபணம் :

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad (m < n)$$

A அணியின் அணி அளவை r ஆதலின், தரம் r கொண்ட பூச்சியமில் சிற்றணிக்கோவை குறைந்தது ஒன்றுவது இருக்கும். பொதுத் தன்மை மாறுமல், இக் கோவை அணியின் இடப் புற மேல் மூலையில் இருக்குமெனக் கொள்வோம். இதை $\triangle_1$ எனக் குறிப்பிடின்,

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{r1} & x_{r2} & \ldots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} & x_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{rs} \\ x_{t1} & x_{t2} & \cdots & x_{tr} & x_{ts} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

Δ_2-ன் தரம் $(r+1)$. இதில் $(r+1)$ஆவது நிரையும், $(r+1)$ஆவது நிரலும், Δ_1-ல் சேராத எஞ்சிய நிரைகளில் ஒன்றும், நிரல்களில் ஒன்றுமாகும்.

Δ_2-ல் கடைசி நிரலிலுள்ள $x_{1s}, x_{2s}, \ldots, x_{rs}, x_{ts}$ என்ற மூலகங்களின் இணைக்காரணிகள் $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ எனின், $\lambda_{r+1} = \Delta_1 \neq 0$.

ஒரு சதுர அணியில் யாதேனும் ஒரு நிரையிலுள்ள மூலகங்களை மற்றொரு நிரையிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களின் இணைக்காரணிகளால் பெருக்கிக் கூட்டி வந்த தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \cdots + \lambda_r x_{r1} + \lambda_{r+1} x_{t1} = 0$$

$$\lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \cdots + \lambda_r x_{r2} + \lambda_{r+1} x_{t2} = 0$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\lambda_1 x_{1r} + \lambda_2 x_{2r} + \cdots + \lambda_r x_{rr} + \lambda_{r+1} x_{tr} = 0$$

மீண்டும், கொள்கைப்படி,

$$\lambda_1 x_{1s} + \lambda_2 x_{2s} + \cdots + \lambda_r x_{rs} + \lambda_{r+1} x_{ts} = \Delta_2 = 0. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

Δ_2-ல் கடைசி நிரல் Δ_1-ல் இல்லாத எஞ்சிய $(n-r)$ நிரல்களில் யாதாவதொரு நிரலாகும். எனவே, சமன்பாடு (3), எஞ்சிய $(n-r)$ நிரல்களில் எந்த ஒரு நிரலுக்கும் பொருந்தும்.

மேற்கூறிய முடிவுகளை இணைத்தால்,

$$\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \quad + \lambda_r x_{r1} + \lambda_{r+1} x_{t1} = 0$$
$$\lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \dots + \lambda_r x_{r2} + \lambda_{r+1} x_{t2} = 0$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots$$
$$\lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} + \dots + \lambda_r x_{rn} + \lambda_{r+1} x_{tn} = 0.$$

இவற்றைக் கூட்டினால்,

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_r X_r + \lambda_{r+1} X_t = 0$$

$$\therefore \quad \lambda_{r+1} = \Delta_1 \neq 0,$$

$$X_t = -\frac{1}{\lambda_{r+1}} [\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_r X_r]$$

அதாவது X_1, X_2, ..., X_r என்ற r வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானம் (Linear combination of r Vectors) X_t ஆகும். X_t என்பது எஞ்சிய $(m-r)$ வெக்டர்களில் யாதேனும் ஒன்றாகும்.

எனவே, X_{r+1}, X_{r+2}, ..., X_m என்ற எஞ்சிய $(m-r)$ வெக்டர்களில் ஒவ்வொன்றும் X_1, X_2, ..., X_r வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்மானமாகும்.

X_1, X_2, ... X_r வெக்டர்கள் ஒரு படிச் சார்பற்றவை எனப் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ni} \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

எனக் கொள்வோம்.

X_1, X_2, ... X_r வெக்டர்கள் ஒரு படிச் சார்புடையவை எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots\ldots + \lambda_r X_r = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் முற்றும் பூச்சியமில் (not all zero) எண்கள் $\lambda_1, \lambda_2, \quad , \lambda_r$ உண்டு.

அதாவது
$$\begin{aligned}
\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + \ldots + \lambda_r x_{1r} &= 0 \\
\lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + \ldots + \lambda_r x_{2r} &= 0 \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad &\ldots\ldots \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad &\ldots\ldots \\
\lambda_1 x_{n1} + \lambda_2 x_{n2} + \ldots + \lambda_r x_{nr} &= 0
\end{aligned}$$

இவற்றில் முதல் r சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\Delta_1 = 0$$

ஆதலின், கிராமரின் விதிப்படி (Grammer's formula),

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$$

இது நம் தற்கோளுக்கு (assumption) எதிரானது. எனவே, $X_1, X_2, \ldots X_r$ வெக்டர்கள் ஒரு படிச் சார்பற்றது.

4-8. சமபடியில்லாத ஒருபடிக்குரிய சமன்பாடுகள் (Non-homogeneous Linear Equations)

n மாறிகளில் m சமபடியில்லாத ஒருபடிக்குரிய சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad &\ldots\ldots \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad &\ldots\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \text{ எனின்,}$$

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பின் வரும் அணி வடிவில் (Matrix form) எழுதலாம்.

$$AX = B$$

A அணி சமன்பாடுகள் தம் கெழுக்களின் அணி (Coefficient matrix) எனவும்,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

எனும் அணி மிகுதிப்படுத்திய அணி (Augmented matrix) எனவும் கூறப்படும். இவ்வணி (A, B) எனக் குறியிடப்படும்

4-9. n மாறிகளில் n சமன்பாடுகள்

கீழ்க்காணும் n சமபடியற்ற ஒரு படிக்குரிய சமன்பாடுகளைக் கவனிப்போம்.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$
$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n.$$

இச் சமன்பாடுகளின் அணிவடிவம் $AX=B$ ஆகும்.

இங்கு,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

$|A| \neq 0$ எனின், மேற்குறிப்பிட்டுள்ள n சமன்பாடுகளும் ‘முறையான சமன்பாடுகள்’ எனப்படும்.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}$$ எனின்,

கிராமரின் தீர்வுப்படி (Grammer's solution)

$$\frac{x_1}{|A_1|} = \frac{x_2}{|A_2|} \dots = \frac{x_n}{|A_n|} = \frac{1}{|A|}$$

எனவே,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}\ ;\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}\ ;\ \dots x_n = \frac{|A_n|}{|A|}\ .$$

மாதிரி 3 :

தீர்வு காண்க :

$$3x + 2y + z = 16$$
$$2x + 3y - 2z = 5$$
$$x + 4y - z = 10.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 15 - 0 + 5 = 20 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 10 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 80 - 30 - 10 = 40$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 16 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 45 + 0 + 15 = 60$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 16 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 + 80 = 80$$

எனவே,

$$\frac{x}{|A_1|} = \frac{y}{|A_2|} = \frac{z}{|A_3|} = \frac{1}{|A|}$$

அதாவது,

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{60} = \frac{z}{80} = \frac{1}{20}$$

$$\therefore \quad x = \frac{40}{20} = 2$$

$$y = \frac{60}{20} = 2$$

$$z = \frac{80}{20} = 4.$$

4-10. பொருத்தமுடைய சமன்பாடு (Consistent Equations)

$AX = B$ என்ற அணி சமன்பாட்டிற்கு ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வுகள் இருப்பின், அவை பொருத்தமுள்ள சமன்பாடுகள் (Consistent equations) எனப்படும். மற்றவை பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் (Inconsistent equations) எனப் படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $2x + 3y = 7$

$3x - 2y = +1$

இதன் தீர்வுகள் $x = 2$, $y = 1$. இச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே முறைத்தீர்வுகள் (Unique solutions) உண்டு. இச் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகளாகும்.

(2) $2x + 3y = 5$

$4x + 6y = 10$

இரண்டாவது சமன்பாடும் முதல் சமன்பாடும் ஒன்றேயாகும்.

$$x = k \text{ எனின், } y = \frac{5 - 2k}{3}$$

k-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு y-ன் மதிப்பு பல்வேருக இருக்கும். எனவே, நமக்கு வரம்பற்ற தீர்வுகள் கிடைக்கும் (Infinite set of solutions). இவை ஒவ்வொன்றும் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளில் பொருந்தும். இச் சமன்பாடுகளும் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகளேயாகும்.

(3) $3x + 5y = 11$

$9x + 15y = 12$

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து $3x+5y=4$ எனக் கிடைக்கப் பெறும். இச் சமன்பாட்டிலும், முதல் சமன்பாட்டிலும் ஒரே சமயத்தில் பொருந்தும் தீர்வுகள் x, y-க்குக் கிடையா. இவை பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் (Inconsistent equations) எனப்படும்.

4-11. தேற்றம்

A, (A, B) அணிகளது அணி அளவைகள் சமமாயிருந்தால் மட்டுமே $AX = B$ சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு உண்டு. [அதாவது $AX = B$ ஒரு பொருத்தமுடைய சமன்பாடாகும்].

நிரூபணம் :

A அணியின் அணி அளவை r எனக் கொள்வோம். A அணியின் நிரல் வெக்டர்கள் $C_1, C_2, \ldots, C_n$ எனின்

$AX = B$ சமன்பாடு

$$[C_1\ C_2\ \ldots\ C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = B \text{ என்றுகும்.}$$

அதாவது, $C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n = B$

கட்டுப்பாடு தேவை—

$AX = B$ சமன்பாடு பொருத்தமுடைய சமன்பாடு எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad B = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_n C_n$$

A-ன் அணி அளவை r ஆதலின், எஞ்சிய $(n-r)$ நிரல்கள் $C_{r+1}, C_{r+2}, \ldots C_n$ ஒவ்வொன்றும் $C_1, C_2, \ldots, C_r$ இவற்றின் ஒரு படிச் சேர்மானமாகும். எனவே B அணி, $C_1, C_2, \ldots C_r$ நிரல்களின் ஒரு படிச் சேர்மானமாகும்.

எனவே, $[A, B]$ அணியிலும் ஒருபடிச் சார்பற்ற நிரல்களின் மீப்பெரு எண்ணிக்கை r ஆகும்.

ஆகவே, $[A, B]$ அணியின் அணி அளவை r ஆகும்.

(அதாவது) A, $[A, B]$ என்ற இரு அணிகளது அளவைகள் சமமாகும்.

கட்டுப்பாடு போதுமானது—

A, $[A, B]$ அணிகளது அணி அளவைகள் சமமெனக் கொள்வோம். இது r எனின், $[A, B]$ அணியிலுள்ள ஒருபடிச் சார்பற்ற (Linearly independent) நிரல்கள் r ஆகும். ஆனால் $[A, B]$ அணியிலுள்ள $C_1, C_2, \ldots, C_r$ வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவையாகும். எனவே, B அணி $C_1, C_2, \ldots, C_r$ இவற்றின் ஒருபடிச் சேர்மானமாகும். ஆகவே, அனைத்தும் பூச்சியமற்ற (not all zero) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ எனும் மாறிலிகள் உண்டு. இவை மூலம் B அணி பின் வருமாறு இணைக்கப்படக் கூடும்.

அதாவது $$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_r C_r + 0 . C_{r+1} + \ldots + 0 . C_n = B$$

இதை $C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n = B$-யுடன் ஒப்பிட்டு நோக்கின்,

$$x_1 = \lambda_1, \quad x_2 = \lambda_2, \ldots, x_r = \lambda_r,$$

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad \ldots, x_n = 0.$$ என்றாகும்.

$\therefore \quad AX = B$ சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வுகள் உண்டு.

அதாவது $AX = B$ ஒரு பொருத்தமுடைய சமன்பாடாகும்.

மாதிரி 4 :

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் என நிறுவுக.

$$2x - y + z = 4$$

$$3x - y + z = 6$$

$$4x - y + 2z = 7$$

$$-x + y - z = 9.$$

இச் சமன்பாடுகள் பின்வரும் சமன்பாட்டிற்குச் சமம்.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

அதாவது $AX = B$.

எனவே $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{R_1+R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2 + 3R_4,\ R_3 + 4R_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{R_4 + R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_2 + C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{C_3 - 3C_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_4 - R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore\ \rho(A) = 3.$$

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_2-3R_1,\ R_3-4R_1,\ R_4+R_1}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad |[A,B]| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[11 + \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{23}{4}$$

$$= \frac{22}{4} \neq 0.$$

எனவே $\rho([A,B]) = 4$.

A-ன் அணி அளவை 3.

(A,B)-ன் அணி அளவை 4.

எனவே, சமன்பாடுகள் பொருதத்மற்ற சமன்பாடுகளாகும்.

மாதிரி 5 :

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகள் என நிறுவுக.

$$x + y + z = 5$$
$$2x + 3y + 4z = 14$$
$$4x + 2y + 2z = 12$$

அணிச் சமன்பாடு $AX = B.$

அதாவது, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix},\quad [A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-8) - 1(4-16) + 1(4-12)$$
$$= -2 + 12 - 8 = 2 \neq 0.$$

$$\therefore\ \rho(A) = 3.$$

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 12 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\0 & 1 & 2 & -6\\0 & -1 & -1 & -4\end{bmatrix}\underset{R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & -6\\0 & -1 & -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$\underset{R_3+R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & -6\\0 & 0 & 1 & -10\end{bmatrix}\underset{C_4-C_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & -6\\0 & 0 & 1 & -10\end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4+3C_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & -7\end{bmatrix}\underset{C_3-2C_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

$$\underset{C_4+7C_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

எனவே, $[A, B]$-ன் அணி அளவு 3.

A, $[A, B]$-ன் அணி அளவுகள் சமமாதலின், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகளாகும்.

மாதிரி 6 : தீர்வு காண்க.

$$2x + 3y + z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$3x + y + 2z = 8.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-3)-3(2-9)+1(1-6) = 2+21-5 = 18 \neq 0.$$

$$\therefore \; \rho(A) = 3.$$

மாறிகளின் எண்ணிக்கையும், A-ன் (கெழு அணி) அணி அளவையும் சமமாதலின் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே முறை தீர்வு (Unique solution) உண்டு.

முறை 1 : (கிராமரின் விதி)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9(4-3) - 3(12-24) + 1(6-16) = 9+36-10 = 35$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2(12-24) - 9(2-9) + 1(8-18) = -24+63-10 = 29$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2(16-6) - 3(8-18) + 9(1-6) = 20+30-45 = 5.$$

$$\therefore \; \frac{x}{|A_1|} = \frac{y}{|A_2|} = \frac{z}{|A_3|} = \frac{1}{|A|}$$

அதாவது,

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{29} = \frac{z}{5} = \frac{1}{18}$$

$$\therefore \; x = \frac{35}{18}, \; y = \frac{29}{18}, \; z = \frac{5}{18}.$$

முறை 2 :

$AX = B$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுதி தொடக்க நிரை மாற்றங்களால் கிடைக்கப்பெறும் பிரிதொரு சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்குச் சமம்.

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - R_1, \quad R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 + R_3, \quad R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad 2x + 4z = 5$$
$$-3y + 3z = -4$$
$$-x - 5y = -10$$

$$\therefore \quad x = \frac{35}{18}, \quad y = \frac{29}{18}, \quad z = \frac{5}{18}.$$

மாதிரி 7 :

தீர்வு காண்க.

$$x + y + z = 39$$
$$6x + 4y + 3z = 150$$
$$10x + 5y + 4z = 310$$

இதன் அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 150 \\ 310 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 6R_1, \quad R_3 - 10R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ -84 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ -84 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127 \\ -84 \\ 88 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x + z = 127$$

$$-2y - 3z = -84$$

$$-y = 88.$$

$$\therefore \quad x = \frac{121}{3}, \quad y = -88, \quad z = \frac{260}{3}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (16-15) - (24-30) + (30-40) = 1 + 6 - 10 = -3 \neq 0$$

எனவே, கெழு அணியின் அணி அளவை 3. மாறிகளின் எண்ணிக்கையும் 3 ஆதலின், ஒரே வழித் தீர்வுதான் உண்டு.

மாதிரி 3 :

தீர்வு காண்க :

$$x - 3y - 8z + 10 = 0$$

$$3x + y - 4z = 0$$

$$2x + 5y + 6z = 13$$

இவற்றின் அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - 3R_1,\ R_3 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 30 \\ 33 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 33 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 11R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x - 3y - 8z = -10$

$y + 2z = 3$

$y = 3 - 2z; \; x = 3y + 8z - 10$

$z = k$ எனக்கொண்டால், $y = 3 - 2k$

$x = 3y + 8z - 10$

$= 3(3 - 2z) + 8z - 10$

$= 9 - 6z + 8z - 10$

$= 2z - 1$

$= 2k - 1$

k-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு x, y இவற்றின் பல்வேறு மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே, முடிவிலி தீர்வுகள் இச் சமன்பாடு களுக்கு உண்டு.

குறிப்பு :

கெழு அணி $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ -ன் அணி அளவை 2.

மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3. எனவே $3 - 2 = 1$ மாறியின் யாதானும் ஒரு மதிப்புக்கு மற்ற இரு மாறிகளின் தீர்வுகள் ஒரே முறையில் இருக்கும்.

மாதிரி 9 :

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் (Inconsistent equations) என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} 2x + 3y \quad &= 7 \\ 5x + 4y + z &= 9 \\ 4x + 6y \quad &= 3 \end{aligned}$$

இவற்றின் அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - R_1, \quad R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad 2x + 3y + 0.z = 7$$
$$3x + y + z = 2$$
$$0x + 0y + 0z = -11$$

கடைசி சமன்பாட்டிலிருந்து $0 = -11$ என்றாகிறது. இது பொருத்தமற்றது. எனவே, சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் ஆகும்.

மாதிரி 10 :

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுள்ள சமன்பாடுகளெனின், K-ன் மதிப்பு யாது ?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = K$$
$$x_1 + 4x_2 + 10x_3 = K^2.$$

இவற்றின் அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ K \\ K^2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 - R_1,\ R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ K-1 \\ K^2-1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ K-1 \\ K_2-3\lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \text{ எனின் } A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

எனவே, $\rho(A) = 2$.

மிகுதிப்படுத்திய அணி $[A, B]$ எனின்,

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & K \\ 1 & 4 & 10 & K^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & K-1 \\ 0 & 0 & 0 & K^2-3K+2 \end{bmatrix}$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகளெனின்,

$$\rho(A) = \rho([A, B])$$

எனவே $[A, B]$ அணியின் அணி அளவை 2 ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ எனின், மிகுதிப்படுத்திய அணி (Augmented matrix) $[A, B]$-ன் அளவை 2 ஆக இருக்கும்.

$$\therefore \quad K^2 - 3K + 2 = 0$$

$$\text{அதாவது } (K-1)(K-2) = 0$$

எனவே $K = 1$, $K = 2$ எனின், கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகளாகும்.

$K = 1$ எனின்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_2 + 3x_3 = 0$$
$$0 = 0.$$

$x_3 = a$ எனக் கொண்டால்,

$$x_2 = -3a, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 + 3a - a = 1 + 2a$$

முடிவிலி தீர்வுகள் கிடைக்கப் பெறும்.

$K = 2$ எனின்,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$
$$x_2 + 3x_3 = 1$$
$$0 = 0.$$

$x_3 = b$ எனின்,

$$x_2 = 1 - 3b; \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3$$
$$= 1 - 1 + 3b - b$$
$$= 2\,b.$$

$\therefore$ $K = 2$ எனின் முடிவிலி தீர்வுகள் கிடைக்கப் பெறும்.

மாதிரி 11 :

a, b-ன் எம் மதிப்புகளுக்கு

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + ax_3 = b$$

எனும் சமன்பாடுகள்,

(i) ஒரே முறைத் தீர்வு (Unique solution)

(ii) முடிவிலி தீர்வுகள் (Infinite set of solutions)

(iii) தீர்வுகளற்று ; இருக்கும் ?

இச் சமன்பாடுகளின் அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ b \end{bmatrix}$$

அதாவது,

$$AX = B.$$

$$R_2 - R_1, \quad R_3 - R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ b-6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ b-10 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$\therefore \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

$$A, B] \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & a-3 & b-10 \end{bmatrix}$$

(i) ஒரே முறைத் தீர்வுக்கு, $A, [A, B]$ அணிகளின் அணி அளவை சமமாக இருக்கவேண்டும். மேலும், மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆதலின், அணி அளவை 3 ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

$a \neq 3, \quad b \neq 10$ எனின்,

$\rho(A) = \rho([A, B]) = 3$ என்றாகும்.

எனவே, ஒரே முறை தீர்வுக்கு $a \neq 3, \quad b \neq 10$.

(ii) $a = 3, \; b = 10$ எனின்,

$\rho(A) = \rho([A, B]) = 2.$

மாறிகளின் எண்ணிக்கை $3 \; (> 2)$ ஆதலின், சமன் பாடுகள் முடிவிலி தீர்வுகள் (Infinite set of solutions) கொண்டிருக்கும்.

எனவே, முடிவிலி தீர்வுகளுக்கு $a = 3, b = 10$.

(iii) $a = 3, \; b \neq 10$ எனின், சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b - 10 \neq 0$ என்றாகும்.

அதாவது $0 = b - 10 \neq 0$ என்றாகும்.

எனவே, சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்றதாகும்.

ஆகவே, தீர்வுகளற்றிருக்கும்.

எனவே, தீர்வுகளற்றிருக்க $a = 3, \; b \neq 10$.

பயிற்சி 4

(1) பின்வரும் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்புடையவை (Linearly dependent) என நிறுவுக.

(i) $[3, 2, 4], \; [1, 0, 2], \; [1, -1, -1]$.

(ii) $[1, 3, 2], \; [5, -2, 1], \; [-7, 13, 4]$.

(iii) $[2, 3, -1, -1], [3, 1, 3, 2], [6, 3, 0, -7], [1, -1, -2, -4]$.

(2) பின்வரும் வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை (Linearly independent) என நிறுவுக.

(i) $[1, 2, 3], [2, -2, 0]$

(ii) $[-2, 2, 1, -1], [-1, 1, -1, 3], [-7, 7, 2, 4]$.

(3) பின்வரும் n, n—வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்பற்றவை என நிறுவுக.

$$[1, 0, \ldots 0], [0, 1, \ldots 0], \ldots, [0, 0, \ldots 1].$$

(4) பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடுகள் என நிறுவுக.

(i)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 8 \\ 2x + 3y + 2z &= 18 \\ x + 5y - z &= 8. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 1. \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 26x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 7x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

(5) பின் வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்ற சமன்பாடுகள் (Inconsistent equations) என நிறுவுக.

(i)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 14 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 &= 13 \\ 7x_1 - 8x_2 + 26x_3 &= 5. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &= -11 \\ 6x_1 + 20x_2 - 6x_3 &= -3 \\ 6x_2 - 18x_3 &= -1. \end{aligned}$$

(iii) $x + y + z = 1$

$x + 2y + 4z = 3$

$x + 4y + 10z = 9.$

(6) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண்க.

(i) $2x + 3y + z = 5$

$x - 2y + 3z = 6$

$3x + y + 2z = 8.$

(ii) $x - y + 2z = 4$

$3x + y + 6z = 6$

$x + y + z = 1.$

(iii) $x + 2y + 3z = 14$

$2x - y + 5z = 15$

$3x - 2y - 4z = -13.$

(iv) $2x + 3y + z = 8$

$x + 2y + 3z = 6$

$3x + y + 2z = 8.$

(v) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4$

$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2.$

(7) λ-ன் எம்மதிப்புகளுக்குப் பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமுடைய சமன்பாடாகும்?

(i) $3x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 1$

$2x + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 + 1 = 0.$

(ii) $\lambda x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$

$4x_1 + 2\lambda x_2 - x_3 = 3$

$6x_1 + 6x_2 + \lambda x_3 = 3.$

(8) λ, μ-ன் எம் மதிப்புகளுக்குப் பின்வரும் சமன்பாடுகள் (i) ஒரேவகைத் தீர்வு, (ii) முடிவிலி தீர்வுகள், (iii) தீர்வுகளற்று; இருக்கும்?

(i)
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$$
$$x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 = \mu.$$

(ii)
$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 5z = 10$$
$$x + 2y + \lambda z = \mu.$$

(9) தீர்வு காண்க.
$$2x + y + z = 3$$
$$5x + 2y + 3z = 6$$
$$x + 3y + 2z = 5.$$

(10) கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க.

(i)
$$5x + 3y + 7z = 4$$
$$3x + 26y + 2z = 9$$
$$7x + 2y + 10z = 5$$

(ii)
$$x + y + z = 11$$
$$2x - 6y - z = 0$$
$$3x + 4y + 2z = 0$$

விடைகள்

(7) (i) $\lambda = -\frac{7}{2}$ (ii) $\lambda = 2$;

(8) (i) $\lambda \neq 5$, (ii) $\lambda = 5$, $\mu = 9$, (iii) $\lambda = 5$, $\mu \neq 9$;

(10) (ii) $x = -8$, $y = -7$, $z = 26$.

5. சிறப்பியல்பு சமன்பாடு

(Characteristic Equation)

5-1. சிறப்பியல்பு அணி (Characteristic Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ஒரு $n \times n$ அணி, λ ஒரு மாறி எனக் கொள்வோம். பின் -

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

எனும் அணி A–ன் சிறப்பியல்பு அணி எனப்படும்.

$|A-\lambda I|$ எனும் அணிக் கோவை A-ன் சிறப்பியல்பு சார்பு (Characteristic function) எனப்படும்.

$|A-\lambda I| = 0$ என்ற சமன்பாடு A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு (Characteristic equation) என்று வழங்கப்படும்.

அதாவது A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

இச் சமன்பாட்டின் n மூலங்களான $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ சிறப்பியல்பு மூலங்கள் (Characteristic roots) அல்லது எய்கன் மதிப்புகள் (Eigen Values) எனப்படும்.

5-2. சிறப்பியல்பு வெக்டர் (Characteristic Vector)

$\lambda = \lambda_1$ என்பது A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களில் யாதானும் ஒன்றெனின், λ-ன் இம் மதிப்பு, $|A-\lambda I| = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்தும்.

அதாவது $|A-\lambda_1 I| = 0$

எனவே $[A-\lambda_1 I]\, X = 0$ எனும் சமன்பாட்டில், X-க்கு அற்பமல்லாத (non-trivial) தீர்வுகள் உண்டு. இத்தகைய ஒவ்வொரு தீர்வு X-ம் A அணியின் சிறப்பியல்பு வெக்டர் அல்லது எய்கன் வெக்டர் [Eigen Vector] எனப்படும்.

மாதிரி 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$ என்ற அணியின்

சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் காண்க.

$$[A-\lambda I] = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

A அணியின் சிறப்பியல்பு அணி $[A-\lambda I]$

A அணியின் சிறப்பியல்பு சார்பு $|A-\lambda I|$

A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

அதாவது $\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

அதாவது $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$

அல்லது $\lambda(\lambda^2 - 18\lambda + 45) = 0$

$\therefore \quad \lambda(\lambda-3)(\lambda-15) = 0$

அதாவது $\lambda = 0,\ \lambda = 3,\ \lambda = 15$

எனவே சிறப்பியல்பு மூலங்கள் 0, 3, 15.

அதாவது $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 15.$

5-3. தேற்றம்

ஒவ்வொரு சிறப்பியல்பு வெக்டருக்கும் இரு வேறு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் இருக்கமுடியாது. ஆனால், ஒவ்வொரு சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கும் பல்வேறு சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் உண்டு.

நிரூபணம் :

X ஒரு பூச்சியமில் சிறப்பியல்பு வெக்டர் எனவும், λ_1, λ_2 இரு வேறு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad AX = \lambda_1 X$$

$$AX = \lambda_2 X$$

எனவே $(\lambda_1 - \lambda_2) X = 0$

ஆனால் $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $X \neq 0$. இது பொருந்தாது.

$\therefore$ ஒரு பூச்சியமில் சிறப்பியல்பு வெக்டருக்கு இரு வேறு சிறப்பியல்பு மூலங்கள் இருக்க முடியாது.

மீண்டும், $AX = \lambda X$ சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்பியல்பு மூலம் λ எனவும், ஒத்த, பூச்சியமில் சிறப்பியல்பு வெக்டர் X எனவும் கொள்வோம்.

$$AX = \lambda X$$

$$\therefore \quad A(KX) = \lambda(KX)$$

இதிலிருந்து KX-ம் சிறப்பியல்பு மூலம் λ-ன் ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர் என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, ஒவ்வொரு சிறப்பியல்பு மூலத்திற்கும் பல்வேறு சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் உண்டு.

5-4. தேற்றம்

A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலமாக λ இருந்தால் மட்டுமே $AX = \lambda X$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு அற்பமல்லாத (non-trivial) தீர்வுகள் உண்டு.

A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலம் λ_1 எனவும், அதன் ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர் X_1 எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad AX_1 = \lambda_1 X_1$$

$$= (\lambda_1 I) X_1$$

$$\therefore \quad AX_1 - (X_1 I) X_1 = 0$$

அதாவது $(A - \lambda_1 I) X_1 = 0$

$X_1 \neq 0$ ஆதலின், $|A-\lambda_1 I| = 0$

எனவே, A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலம் ஒவ்வொன்றும், சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda_1 I| = 0$-ன் மூலமாகும்.

மீண்டும், λ_1 என்பது A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda_1| = 0$-ன் மூலம் எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ $(A-\lambda_1 I) X_1 = 0$ எனும் அணி X_1 எனும் பூச்சியமில் தீர்வு ஒன்று பெற்றிருக்க வேண்டும்.

எனவே, $AX_1 = \lambda_1 I X_1 = \lambda_1 X_1$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் X_1 எனும் ஒரு பூச்சிய மில் வெக்டர் உண்டு.

ஆகவே, A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டின் மூலம் ஒவ்வொன்றும் A அணியின் சிறப்பியல்பு மூலமாகும்.

மாதிரி 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களையும், ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் காண்க.

$$[A-\lambda I] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

$$\text{அதாவது,}\quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32 = 0$$

$$\text{அதாவது}\quad (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0$$

எனவே, சிறப்பியல்பு மூலங்கள்

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = +2, \quad \lambda_3 = 8.$$

$\lambda_1 = 2$ எனின், சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad [A - \lambda_1 I]\, X_1 = 0$$

$$\text{அதாவது}\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

இச் சமன்பாடுகள் யாவும்

$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ என்ற ஒரு சமன்பாட்டிற்குச் சமமாகும்.

கெழு அணியின் அணி அளவை 1 என்பது தெளிவு. மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும்.

எனவே $3 - 1 = 2$ மாறிகளுக்கு யாதேனும் மதிப்புகள் அளிக்கப்பெறும்.

$x_1 = K_1, \quad x_2 = K_2$ எனின்,

$x_3 = x_2 - 2x_1 = K_2 - 2K_1.$

எனவே சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$$X_1 = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_2 - 2K_1 \end{bmatrix}$$

குறிப்பாக $K_1 = -1, \quad K_2 = 0$ எனின், $x_3 = 2$

அல்லது $K_1 = 1, \quad K_2 = 2$ எனின், $x_3 = 0$

எனவே $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 8$ எனின், சிறப்பியல்பு வெக்டர் X_3 என்போம்.

$\therefore \quad [A - 8I]\, X_3 = 0$

அதாவது $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$\therefore \quad -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 ; \quad -2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 ;$
$2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0.$

கெழு அணியின் அணி அளவை 2 ஆதலின், $x_3 = C$ எனக் கொண்டால், $x_1 = 2C, \quad x_2 = -C$ ஆகும்.

எனவே, $X_3 = \begin{bmatrix} 2C \\ -C \\ C \end{bmatrix}$

மாதிரி 3 :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களையும், ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ எனின்,

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

அதாவது $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \quad (1-\lambda)(-4-\lambda)(7-\lambda) = 0$$

எனவே, சிறப்பியல்பு மூலங்கள்,

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 7.$$

$\lambda_1 = 1$ எனின், ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad [A-\lambda_1 I]\, X_1 = 0$$

அதாவது $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$-5x_2 + 2x_3 = 0$$
$$6x_3 = 0$$

$|A| = 0$ ஆதலின், அதன் அணி அளவை < 3. கெழு அணியின் அணி அளவை 2 ஆகும். எனவே $3 - 2 = 1$. ஆக ஒரு மாறிக்குக் கொடுக்கும் எந்த ஒரு மதிப்பிற்கு மற்ற இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் கிடைக்கப்பெறும்?

எனவே $x_1 = K, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$

எனக் கொள்வோமெனின்,

சிறப்பியல்பு வெக்டர் $\begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ஆகும்.

$\lambda = -4$ எனின், சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad [A - \lambda_2 I] X_2 = 0$$

அதாவது $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_3 = 0$$
$$11x_3 = 0$$

$$\therefore \quad x_3 = 0, \quad 5x_1 = -2x_2$$

கெழு அணியின் அளவை 2 ஆதலின், $3 - 2 = 1$ மாறிக்குக் கொடுக்கும் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஏற்றவாறு மற்ற இரு மாறிகளின் மதிப்புகள் கிடைக்கப் பெறும்.

$$x_1 = 2C \text{ எனின், } x_2 = -5C, \; x_3 = 0$$

எனவே சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2C \\ -5C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 7$ எனின், சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad [A - \lambda_3 I_3]\, X_3 = 0$$

அதாவது $$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$-11x_2 + 2x_3 = 0$$
$$0 = 0$$

கெழு அணியின் அணி அளவை 2 ஆகும்.

$x_3 = C$ எனக் கொண்டால்,

$$x_2 = \frac{2}{11}C,\ x_1 = \frac{2x_2 + 3x_3}{6} = \frac{\frac{4}{11}C + 3C}{6}$$

$$= \frac{37}{66}C.$$

எனவே, $X_3 = \begin{bmatrix} \frac{37}{66}C \\ \frac{2}{11}C \\ C \end{bmatrix}.$

5-5 கெலெய்-ஆமில்டன் தேற்றம் (Cayley-Hamilton Theorem)

ஒவ்வொரு சதுர அணியும் அதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டில் பொருந்தும்.

நிரூபணம் :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ எனின்,

$$[A-\lambda I] = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

எனவே, A-ன் சிறப்பியல்பு சார்பு $|A-\lambda I|$

அதாவது

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^n \{ a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \} \text{ (என்க).}$$

$\phi(\lambda) = |A-\lambda I|$ எனின்,

A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு

$$\phi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots \dots a_n \lambda^n = 0$$

நாம் $\phi(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = 0$

என நிறுவ வேண்டும்.

$[A-\lambda I]$ அணியின் இணைக்காரணிகளால் அமையும் அணிக் கோவையின்படி $(n-1)$ ஆதலின், $[A-\lambda I]$ அணியினது துணை அணி (Adjoint matrix) அல்லது A அணியின் சிறப்பியல்பு துணை அணியின் மூலங்கள் λ-ல் $(n-1)$ படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

$\therefore$ துணை அணி $[A-\lambda I]$

$$= B_0 \lambda^{n-1} + B_1 \lambda^{n-2} + \dots + B_{n-1}$$

இங்கு $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ என்பவை $(n-1)$ தரமுடைய சதுர அணிகளாகும்.

$[A-\lambda I]$ துணை அணி $[A-\lambda I] = |A-\lambda I| I$

$$\therefore [A-\lambda I] [B_0\lambda^{n-1} + B_1 \lambda^{n-2} + \dots + B_{n-1}]$$
$$= (-1)^n [a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n]$$

λ-ன் ஒத்த படிகளைச் சமப்படுத்தினால், பின்வரும் சமன் பாடுகள் கிடைக்கப் பெறும்.

$$-B_0 = (-1)^n a_n I$$
$$AB_0 - B_1 = (-1)^n a_{n-1} I$$
$$AB_1 - B_2 = (-1)^n a_{n-2} I$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$AB_{n-1} = (-1)^n a_0 I$$

இச் சமன்பாடுகளை முறையே A^n, A^{n-1}, A^{n-2}, ..., I ஆல் பெருக்கிக் கூட்டினல்,

$$0 = (-1)^n [a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n]$$

என்ருகும்.

(அதாவது) $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n = 0$

$\therefore$ A அணி அதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டில் பொருந்தும்.

மாதிரி 4 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ அணி அதன் சிறப்பியல்பு

சமன்பாட்டில் பொருந்தும் என நிறுவுக.

$$[A - \lambda I] \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

எனவே, சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\text{அதாவது} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (1-\lambda)(1+\lambda)^2 + 4(1+\lambda) = 0$$

அதாவது $\lambda^3+\lambda^2-5\lambda-5 = 0.$

நாம் $A^3+A^2-5A-5=0$ என நிறுவ வேண்டும்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^3 = A^2 . A$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A^3 + A^2 - 5A - 5I$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ 10 & +5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+5-5-5, & 10+0-10+0, & 0+0+0+0 \\ 10+0-10+0, & -5+5+5-5, & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0, & 0+0+0+0, & -1+1+5-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad A^3 + A^2 - 5A - 5I = 0$$

எனவே, A அணி அதன் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டில் பொருந்தும்.

5-6. பூச்சியமில் கோவை அணியின் நேரெதிர் அணி காணுதல்

A ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி எனின், அதன் சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்புக் கோவை (Characteristic Polynomial). $|A-\lambda I|$ -ல், $\lambda = 0$ எனப் பிரதியிடின், நிலை எண் உறுப்பு (Constant term) கிடைக்கும். அதாவது $|A-\lambda I|$ என்ற கோவையில் நிலை எண் உறுப்பு உண்டு.

கெய்லி–ஆமில்டன் தேற்றப்படி,

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = 0$$

$a_0 = |A| \neq 0$ ஆதலின், இரு பக்கமும் A^{-1} ஆல் பெருக்க,

$$a_0 A^{-1} + a_1 I + a_2 A + \dots + a_n A^{n-1} = 0$$

$$\therefore \quad A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I - \frac{a_2}{a_0} A - \frac{a_3}{a_0} A^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0} A^{n-1}.$$

மாதிரி 5 :

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ அணியின் நேரெதிர் அணி காண்க.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(0) + 1(2-12) + 2(0)$$

$$= -10 \neq 0.$$

$\therefore$ A அணி பூச்சியமில் கோவை அணியாகும்.

A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

அதாவது: $$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (3-\lambda)[-\lambda(2-\lambda)] + 1[2-\lambda-12] + 2[4\lambda] = 0$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - \lambda + 10 = 0$$

$$\therefore \quad A^3 - 5A^2 - A + 10I = 0$$

$a_0 = 10,\ a_1 = -1,\ a_2 = -5,\ a_3 = 1$

$$A^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} I - \frac{a_2}{a_0} A - \frac{a_3}{a_0} A^2$$

$$= \frac{1}{10} I + \frac{5}{10} A - \frac{1}{10} A^2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -3 & 7 \\ 15 & -1 & 8 \\ 20 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 16 & -3 & 7 \\ 15 & -1 & 8 \\ 20 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{15}{10} & \frac{-5}{10} & \frac{10}{10} \\ \frac{5}{10} & 0 & \frac{15}{10} \\ \frac{20}{10} & 0 & \frac{10}{20} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{-16}{10} & \frac{3}{10} & \frac{-7}{10} \\ \frac{-15}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-8}{10} \\ \frac{-20}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-12}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} + \frac{15}{10} - \frac{16}{10} & 0 - \frac{5}{10} + \frac{3}{10} & 0 + \frac{10}{10} - \frac{7}{10} \\ 0 + \frac{5}{10} - \frac{15}{10} & \frac{1}{10} + 0 + \frac{1}{10} & 0 + \frac{15}{10} - \frac{8}{10} \\ 0 + \frac{20}{10} - \frac{20}{10} & 0 + 0 + \frac{4}{10} & \frac{1}{10} + \frac{10}{10} - \frac{12}{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A-ன் நேரெதிர் அணி $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -10 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

மாதிரி 6 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ எனின்,

A அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு காண்க.

கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தைச் சரிபார்த்து A-ன் நேரெதிர் அணி காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

அதாவது $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\therefore \quad (2-\lambda)\,[(2-\lambda)^2-1]+1\,[-(2-\lambda)+1]+1\,[(\lambda-2)+1]=0.$$

அதாவது $(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)+(\lambda-1)+(\lambda-1)=0$

அதாவது $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4=0$

கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றப்படி

$$A^3-6A^2+9A-4I=0$$

$A^2 = A.A$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$A^3 = A^2\,A$

$$=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 & -21 & -21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^3-6A^2+9A-4I$

$$=\begin{bmatrix} 22 & -21 & -21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}-6\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$+9\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & -21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36 & -30 & -30 \\ -30 & 36 & -30 \\ 30 & -30 & 36 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 18 & -9 & 9 \\ -9 & 18 & -9 \\ 9 & -9 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

எனவே, $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0.$

நேரெதிர் அணி காணுதல் :

$$A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$$

A^{-1} ஆல் இரு பக்கமும் பெருக்க,

$$A^2 - 6A + 9I - 4A^{-1} = 0.$$

$$\therefore \quad 4A^{-1} = A^2 - 6A + 9I$$

ஆதாவது $A^{-1} = \dfrac{1A^2}{4} - \dfrac{6A}{4} + \dfrac{9I}{4}$

$\therefore \quad 4\,A^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & +6 & -6 \\ +6 & -12 & 6 \\ -6 & 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

எனவே, $A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$

மாதிரி 7 :

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & +3 \end{bmatrix}$ எனின்,

$A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I$ என்ற அணியைக் காண்க.

A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

அதாவது $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & +3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \quad (\lambda - 2)(\lambda - 3) + 1 = 0$

அதாவது $\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0.$

எனவே $A^2 - 5A + 7I = 0$

$$A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I$$
$$= (A^2-5A+7I)(A^2 + A - 3I) - 20A + 16I$$
$$= -20A + 16I \qquad [\because \; A^2 - 5A + 7I = 0].$$
$$= -20\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 16\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -40 & 20 \\ -20 & -60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -24 & 20 \\ -20 & -44 \end{bmatrix}$$
$$\therefore \quad A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I = \begin{bmatrix} -24 & 20 \\ -20 & -44 \end{bmatrix}.$$

5-7. வடிவொத்த அணிகள் (Similar Matrices)

X ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி எனக் கொள்வோம். பின் $X^{-1}AX = B$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் A, B எனும் இரு அணிகள் இருக்குமெனின், அவை இரண்டும் வடிவொத்த அணிகள் எனப் படும்.

5-8. தேற்றம்

இரு அணிகள் வடிவொத்தவை எனின், அவை இரண்டிற்கும் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு ஒன்ருகும்.

நிரூபணம் :

இரு வடிவொத்த அணிகள் A, B எனக் கொள்வோம். பின் $B = X^{-1}AX$ ஆகும்.

A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

B-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|B-\lambda I| = 0$

$$\begin{aligned}|B-\lambda I| &= |X^{-1}AX-\lambda I|\\ &= |X^{-1}AX-X^{-1}\lambda IX|\\ &= |X^{-1}(A-\lambda I)X|\\ &= |X^{-1}|\,|A-\lambda I|\,|X|\\ &= |A-\lambda I|\,|X^{-1}|\,|X|\\ &= |A-\lambda I|\,|X^{-1}X|\\ &= |A-\lambda I|\,|I|\\ &= |A-\lambda I| \qquad (\because |I| = 1)\end{aligned}$$

எனவே A, B என்ற இரு வடிவொத்த அணிகளின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகள் ஒன்றேயாகும்.

5-9. ஓர் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் மெய்யெண்களாகவோ அல்லது சிக்கலெண்களாகவோ இருக்கும்.

மெய்யெண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்கள் மெய்யெண்களாகவோ அல்லது சிக்கலெண்களாகவோ இருக்கக் கூடும். எனவே, ஓர் அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$-ன் மூலங்கள் மெய் அல்லது சிக்கலெண்களாக இருக்கும். ஆனால், ஒரு சமச்சீர் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் மெய் மதிப்பு கொண்டிருக்கும்.

5-10. சமமூலைவரை அணிகளாக மாற்றுதல் (Diagonalisation of Matrices)

A ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி எனவும், அதன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் அல்லது எய்கன் வெக்டர்களால் (Eigen Vectors) அமையும் அணி X எனவும் கொண்டால், $X^{-1}AX = D$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் கிடைக்கும் D அணி சமமூலைவரை அணியாகும்.

மாதிரி 8 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$ எனும் அணியை சமமூலைவரை அணியாக மாற்றுக.

A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A-\lambda I| = 0$

அதாவது $$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 8 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

$\therefore \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0.$

எனவே $\lambda = -1, 2, 4.$

$\lambda = -1$ எனின், எய்கன் வெக்டர் X_1 எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad [A - \lambda I]\, X_1 = 0.$

அதாவது $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad x_1 + x_3 = 0 ; \quad 8x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 ; \quad -x_2 + 6x_3 = 0.$

$\therefore \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 1.$

எனவே, $\lambda = -1$-ன் ஒத்த எய்கன் வெக்டர்

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda = 2$ எனின், எய்கன் வெக்டர் அல்லது சிறப்பியல்பு வெக்டர் X_2 எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad [A-\lambda I]\, X_2 = 0$$

அதாவது
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -2x_1 + x_3 = 0\ ; \quad 8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\ ; \quad -x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2.$$

$\therefore \quad \lambda = 2$-ன் ஒத்த எய்கன் வெக்டர்

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$ எனின், சிறப்பியல்பு வெக்டர் X_3 என்போம்.

$$\therefore \quad [A-\lambda I] \quad X_3 = 0$$

அதாவது
$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad -4x_1 + x_3 = 0\ ; \quad 8x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0\ ; \quad -x_2 + x_3 = 0.$$

$$\therefore \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 4$$

எனவே $\lambda = 4$-ன் ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

ஆகவே எய்கன் வெக்டர்களை நிரல்களாகக் கொண்ட அணி

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

இனி X^{-1} ஐக் காண்போம்.

X-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|X - \lambda I| = 0$

அதாவது $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 6 & 6-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

இதைச் சுருக்கின்,

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - \lambda + 30 = 0.$$

$$\therefore \quad X^3 - 9X^2 - IX + 30\, I = 0$$

இரு புறமும் X^{-1} ஆல் பெருக்க

$$X^2 - 9\,X - I + 30\,X^{-1} = 0$$

$$\therefore \quad 30X^{-1} = -X^2 + 9\,X + I$$

$X^2 =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 7 \\ 34 & 50 & 46 \\ 15 & 21 & 25 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad 30X^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} -8 & -7 & -7 \\ -34 & -50 & -46 \\ -15 & -21 & -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 9 & 9 \\ 54 & 54 & 36 \\ 9 & 18 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 2 & 2 \\ 20 & 5 & -10 \\ -6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

எனவே X-ன் நேரெதிர் அணி

$$X^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -16 & 2 & 2 \\ 20 & 5 & -10 \\ -6 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

சமமூலைவரை அணி D எனின், $D = X^{-1} AX$

$$\therefore \quad D = \frac{1}{30}$$

$$\begin{bmatrix} -16 & 2 & 2 \\ 20 & 5 & -10 \\ -6 & -3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 16 & -2 & -2 \\ 40 & 10 & -20 \\ -24 & -12 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

5-11. செங்குத்து வெக்டர்கள் (Orthogonal Vectors)

இரு வெக்டர்கள் X, Y-ன் உட்பெருக்கு (Inner product) பூச்சியமெனின், அவை இரண்டும் செங்குத்து வெக்டர்கள் எனப்படும்.

அதாவது $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$

$Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$

இரு செங்குத்து வெக்டர்களெனின்,

$$\bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \ldots +, \bar{x}_n y_n = 0$$

அல்லது $x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \ldots + x_n \bar{y}_n = 0$

அதாவது $X' Y = XY' = 0.$

5-12. தேற்றம்

A என்ற ஒரு சதுர அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் λ_i, λ_j எனவும், அதன் ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் X_i, X_j எனவும் கொள்வோம். பின் A ஒரு சமச்சீர் அணி எனின், X_1, X_2 வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்களாகும்.

நிரூபணம்:

$\lambda_i \lambda_j$-ன் ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் முறையே X_i, X_j எனின்,

$$AX_i = \lambda_i X_i \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$AX_j = \lambda_j X_j \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \quad X_j' AX_i = X_j' \lambda_i X_i$$

$$= \lambda_i X_j' X_i \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-லிருந்து $AX_j = \lambda_j X_j$

$$\therefore \quad X_j' A' = \lambda_j X_j,$$

$$\therefore \quad A' = A, X_j' A = \lambda_j X_j'$$

அதாவது $X_j' AX_i = \lambda_j X'_j X_i$

$= \lambda_i X_j' X_i$ [(3)-ன் படி]

$$\therefore \quad \lambda_i X_j' X_i = \lambda_j X_j' X_i$$

அதாவது $(\lambda_i - \lambda_j) X'_j X_i = 0$

$$\therefore \quad \lambda_i - \lambda_j \neq 0, \; X'_j X_i = 0.$$

எனவே X_i, X_j செங்குத்து வெக்டர்களாகும்.

மாதிரி 9 :

ஒரு முக்கோண அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் அவ்வணியின் மூலைவிட்ட மூலங்கள் என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$ எனின்,

A-ன் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

அதாவது $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

இதை விரிவுபடுத்தினால்

$$(a_{11} - \lambda)\,[\,(a_{22} - \lambda)\,(a_{33} - \lambda)\,] = 0$$

எனவே $\lambda = a_{11}$, $\lambda = a_{22}$, $\lambda = a_{33}$

$\therefore$ சிறப்பியல்பு மூலங்கள் மூலைவிட்ட மூலங்களாகும்.

பயிற்சி 5

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களையும், ஒத்த சிறப்பியல்பு வெக்டர்களையும் காண்க.

(2) பின்வரும் அணியின் சிறப்பியல்பு வெக்டர்களைக் காண்க.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை உபயோகித்துப் பின்வரும் அணிகளின் நேரெதிர் அணிகள் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) பின்வரும் அணிகளது சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகள் ஒன்றே என நிறுவுக.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}.$$

(5) பின் வரும் அணிகள் அவற்றின் சிறப்பியல்பு சமன்பாட்டில் பொருந்தும் என நிறுவுக.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ எனின்,

$B^5 - 27B^3 + 65B^2$ ஐக் காண்க.

(6) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ எனின்,

$A^3 - 6A^2 + 10A - 4I$ ஐக் காண்க.

(7) A எனும் பூச்சியமில் கோவை அணியின் சிறப்பியல்பு மூலம் λ எனின், $\frac{|A|}{\lambda}$ என்பது துணை அணி A-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் என நிறுவுக.

(8) ஒரு பூச்சிய கோவை அணி A-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் λ எனின், A^{-1}-ன் சிறப்பியல்பு மூலம் λ^{-1} என நிறுவுக.

(9) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ எனும் சமச்சீர் அணியின் வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்கள் என நிறுவுக.

(10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற சமச்சீர் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் காண்க. இதன் வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்கள் என நிறுவுக.

(11) A, B என்ற இரு சதுர அணிகளில் A ஒரு பூச்சியமில் கோவை அணி எனின், $A^{-1}B$, $B A^{-1}$ இரண்டினது சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகளும் ஒன்றே என நிறுவுக.

(12) பின்வரும் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்களைக் காண்க. இதன் சிறப்பியல்பு வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர் என நிறுவுக. கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை உபயோகித்து அதன் நேரெதிர் அணியைக் காண்க.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(13) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}$ எனின் $A^4 = I$ என நிறுவுக.

(14) பின்வரும் அணிகளை சம மூலைவரை அணிகளாக மாற்றுக.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ b+1 & b \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(15) பின்வரும் அணிகளின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடுகளையும், எய்கன் மதிப்புகளையும் காண்க.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

விடைகள்

(1) 5, 1, 1.   (2) $\lambda^3+4\lambda^2-\lambda-12=0.$

$$\begin{bmatrix} C \\ C \\ C \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ -(K_1+2K_2) \end{bmatrix}$$

(3) (i) $$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 10 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

(ii) $$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -8 & 6 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

(iv) $$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3i & i \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5\. (iii) $\begin{bmatrix} 40 & 0 & 48 \\ 129 & -3 & 0 \\ 86 & -43 & -132 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(14) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(15) (i) $(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-2)$
$[2,\ 2,\ -2]$

(ii) $\lambda^3-6\lambda^2+5\lambda-1=0.$

II. நவீன இயற்கணிதம்

(Modern Algebra)

6. கணங்கள்

(Sets)

6-1. நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு அல்லது இனம் ஒரு **கணம்** எனப்படும். நன்குவரையறுக்கப்பட்டுள்ள இனம் எனின், எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளும் அந்த இனத்தில் உண்டு அல்லது இல்லை என்பதை நம்மால் தெளிவாகக் கூறமுடியும். எடுத்துக்காட்டாக, 2, 4, 6, 8, 10 என்ற எண்களைக் கொண்ட தொகுப்பு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் இனமாகும். மேற் குறிப்பிட்ட ஐந்து எண்களைத் தவிர்த்து வேறு எந்த எண்ணும் அந்த இனத்தில் கிடையாது.

கணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. அனைத்து கூட்டு முழு எண்கள்
2. அனைத்து விகிதமுரு எண்கள்
3. அனைத்து உயிரெழுத்துகள்
4. அனைத்து மெய்யெழுத்துகள்
5. இந்தியாவிலுள்ள அனைத்து தலை நகரங்கள்
6. இந்தியாவிலுள்ள அனைத்து மாநிலங்கள்
7. அனைத்து இரட்டை எண்கள்
8. அனைத்து ஒற்றை எண்கள்
9. ஒரு வகுப்பிலுள்ள அனைத்து மாணவர்கள்
10. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் அனைத்து மூலங்கள்
11. அனைத்து விகிதமுறு எண்கள்
12. ஒரு கல்லூரியிலுள்ள அனைத்து ஆசிரியர்கள்

6-2. குறியீடுகள் (Notations)

A, B, C, X, Y, Z என்ற பெரிய எழுத்துகளினால் கணங்களையும் a, b, c, x, y, z என்ற சிறிய எழுத்துக்களினால் அதன் மூலங்களையும் குறியீடு செய்வது மரபு. எடுத்துக்காட்டாக, ஆங்கில எழுத்துகளில் உயிரெழுத்துகள் a, e, i, o, u கொண்ட கணத்தை

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$ என்று எழுதுகிறோம்.

மூலகங்களின் எண்ணிக்கை அதிகமெனின், தேவையான அளவு மூலகங்களை எழுதுவதன் மூலம் அக் கணத்திலுள்ள பிற மூலகங்களையும் மொத்த எண்ணிக்கையையும் குறிப்பிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, 101 ஐ விடக் குறைவான மதிப்புடைய இரட்டை நேரெண்களை

$$B = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots 100 \}$$ என்று எழுதலாம்.

$$C = \{ 3, 6, 12, 24, \ldots \}$$

என்பது 3 ஐ முதல் உறுப்பாகவும் பொது விகிதம் 2-ம் உடைய ஒரு முடிவிலி பெருக்கு விருத்தியைக் கொண்ட ஒரு முடிவிலி கணத்தைக் (Infinite set) குறிக்கும்.

இவ்வாறு கணத்தைக் குறிக்கும் வடிவை அட்டவணை வடிவம் (Tabular form) என்கிறோம்.

மேலும், a எனும் மூலகம் A எனும் கணத்தைச் சேர்ந்தது எனின்,

$$a \in A$$

எனவும், a மூலகம் A கணத்தைச் சேர்ந்தது அல்ல எனின்,

$$a \notin A$$

எனவும் குறிப்பிடுவோம்.

a, b என்ற இரு மூலகங்கள் கணம் A-ல் இருப்பின், $a, b \in A$ எனக் குறியீடு செய்வோம்.

மீண்டும், ஒரு கணத்தின் மூலகங்களுக்குப் பொருந்தும் பண்புகளைக் குறிப்பிடுவதன் மூலம் அக் கணத்தைக் குறிப்பிடலாம். எடுத்துக்காட்டாக, இரட்டை நேரெண்களைக் கொண்ட கணம் A ஐப் பின்வருமாறு குறியீடு செய்யலாம்.

$A = \{ x \mid$ இரட்டை எண்கள் $x > 0 \}$.

இவ்வாறு குறியிடுவதைக் கணம் அமைப்பான் (set builder) வடிவம் என்கிறோம்.

6-3. சில கணங்களும் அவற்றின் குறியீடுகளும்

கணங்கள்	குறியீடுகள்
அனைத்து இயற்கை எண்கள்	N
அனைத்து பூச்சியமில் முழு எண்கள்	I_0
அனைத்து நேர் முழு எண்கள்	I_+
அனைத்து முழு எண்கள்	I
அனைத்து மெய்யெண்கள்	R
அனைத்து நேர் மெய்யெண்கள்	R_+
அனைத்து பூச்சியமில் மெய்யெண்கள்	R_0
அனைத்து சிக்கலெண்கள்	C
அனைத்து பூச்சியமில் சிக்கலெண்கள்	C_0
அனைத்து விகிதமுறு எண்கள்	Q

6-4. முடிவுள்ள கணமும், முடிவிலி கணமும் (Finite and Infinite sets)

முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட கணம் முடிவுள்ள கணமெனவும், முடிவிலி எண்ணிக்கைக் கொண்ட மூலகங்கள் உள்ள கணம் முடிவிலி கணமெனவும் கூறப்படும்.

முடிவுள்ள கணத்திற்கு எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) முப்பது நாள்கள் கொண்ட மாதங்களின் கணம்.

(2) இந்தியாவின் தலை நகரங்களைக் கொண்ட கணம்.

(3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கணம்.

முடிவிலி கணத்திற்கு எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) மெய்யெண்களின் கணம்.

(2) நேர்கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் கணம்

(3) விண் மீன்களது கணம்.

6-5. சம கணங்கள் (Equal Sets)

A, B என்ற இரு கணங்களில் ஒன்றினது மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் மற்றதிலிருப்பின், அவை இரண்டும் சம கணங்கள் எனப்படும். அவை $A = B$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $A = \{1, 3, 4, 7\}$

$B = \{3, 7, 4, 3, 1, 7\}$ எனின்,

$A = B$.

(2) $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 1, 3, 2, 1\}$

$C = \{3, 2, 1\}$ எனின்,

$A = B = C$.

மேற் குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து கணங்களது மூலகங்களின் வரிசையும், எண்ணிக்கையும் பொருட்டல்ல என்பது தெளிவாகிறது.

இரு கணங்கள் A, B சமமற்றவை எனின், $A \neq B$ எனக் குறியிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 3, 7, 9\}$

$B = \{1, 7, 3, 10\}$ எனின்

$A \neq B$.

6-6. பூச்சியக் கணம் (Null set)

மூலகமற்ற ஒரு கணம் பூச்சியக் கணம் எனப்படும். இது ϕ எனக் குறிப்பிடப்படும். $\{\phi\}$ என்பது பூச்சியக் கணங்களைக் கொண்ட ஒரு கணமாதலின். ϕ-ம், $\{\phi\}$ -ம் வெவ்வேறானவை.

a-க்குச் சமமில்லாத a என்ற மூலகம் இல்லையாதலின், பூச்சியக் கணம் ϕ,

$$\phi = \{a \mid a \neq a\}$$

எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$A = \{x \mid x^2 = 5, \ x \text{ இரட்டை எண்}\}$$

எனும் கணத்தில், $x^2 = 5$ சமன்பாட்டில் பொருந்தும் இரட்டை எண்கள் கிடையாதாதலின், A ஒரு பூச்சியக் கணமாகும்.

6-7. ஒருமைக் கணம் (Singleton)

ஒரே ஒரு மூலகம் கொண்ட கணம் ஒருமைக் கணம் எனப்படும். $\{0\}$ என்ற ஒரு கணம் ஒருமைக் கணமாகும்.

6-8. கீழ்க்கணங்கள் (Sub-sets)

A என்னும் கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் B கணத்திலுமிருப்பின், கணம் A கணம் B-ன் கீழ்க்கணம் எனப்படும். இது $A \subseteq B$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும். மேலும், B கணம் A கணத்தின் மேல் கணம் (Super set) எனப்படும். இது $B \supseteq A$ எனக் குறியீடு செய்யப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $A = \{3, 7, 9\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ எனின்,

$A \subseteq B$ (அல்லது) $B \supseteq A$

(2) $A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{3, 5, 1\}$ எனின்,

$A \subseteq B$. மேலும் $A = B$.

$\therefore \ A \subseteq A$

(அதாவது) கணம் A அதனின் கீழ்கணமாகும்.

(3) $A = \{1, 3, 7\}$

$B = \{2, 3, 7, 8\}$ எனின்,

A-ன் மூலகமான 1, B-ன் மூலகமல்லவாதலின்,

$$A \nsubseteq B$$

அதாவது கணம் A, கணம் B-ன் கீழ்க்கணமல்ல.

குறிப்பு :

(1) எந்த ஒரு கணத்திற்கும் பூச்சிய கணம் கீழ்க்கணமாகும்.

(2) எந்த ஒரு கணமும் அதனுடைய கீழ்க்கணமாகும்.

(3) A கணம் B கணத்தின் கீழ்க்கணம், B கணம் C கணத்தின் கீழ்க்கணம் எனின், A கணம் C கணத்தின் கீழ்க்கணமாகும்.

6-9. தகு கணம், தகா கணம் (Proper and Improper set)

$A \subseteq B$, $A \neq B$ எனின், A கணம் B கணத்தின் தகு கணம் எனப்படும்.

$A \subseteq B$, $A = B$ எனின், A கணம் B கணத்தின் தகா கணம் எனப்படும்.

6-10. பொதுவான கணம் (Universal set)

பரிசீலனையிலுள்ள அனைத்துக் கணங்களும் ஒரு நிலைத்த கணத்தின் (fixed set) கீழ்க்கணங்களெனின், அந் நிலைத்த கணம் பொதுவான கணம் எனப்படும். அது $\cup$ எனக் குறியிடப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தளத்துப் புள்ளிகளனைத்தும் பொதுவான கணமாகும்.

6-11. ஒன்ருத கணங்கள் (Disjoint sets)

A, B என்ற இரு கணங்களுக்கும் பொதுவான மூலகமில்லை எனின், அவை இரண்டும் ஒன்ருத அல்லது இணையாத கணங்கள் எனப்படும்.

6-12. அடிப்படை கணச் செய்கைகள் (Fundamental set operations)

ஒன்றிணைப்பு (Union), வெட்டு (Intersection), வேறுபாடு (Difference) என்பவை அடிப்படை கணச் செய்கைகளாம்.

6-13. கணங்களின் ஒன்றிணைப்பு (Union of sets)

A, B என்பவை இரு கணங்களெனின், அவற்றின் ஒன்றிணைப்பு $A \cup B$ எனக் குறியிடப்படும். $A \cup B$ என்பது A, B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட கணமாகும்.

குறியீட்டின்படி,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ அல்லது } x \in B\}.$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, d, e\}$ எனின்

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

(2) $A = \{x \mid x$ ஒரு கூட்டு மெய் எண்$\}$

$B = \{y \mid y$ ஒரு குறை மெய் எண்$\}$ எனின்,

$A \cup B = \{z \mid$ பூச்சியமில் மெய்யெண்கள்$\}$.

6-14. ஒன்றிணைப்பின் சில பண்புகள்

(1) மாற்று விதி (Commutative law)

$A \cup B = B \cup A.$

எடுத்துக்காட்டு

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{c, d, e\}$ எனின்,

$A \cup B = \{a, b, c, d, e,\}$

$= B \cup A.$

(2) சேர்ப்பு விதி (Associative Law)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

எடுத்துக்காட்டு :

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{d, e, f\}$

$C = \{g, h, i\}$ எனின்,

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

$B \cup C = \{d, e, f, g, h, i\}$

$A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

(3) $A \cup A = A$

(4) $A \cup \phi = A.$

6-15. கணங்களின் வெட்டு (Intersection of sets)

A, B என்ற இரு கணங்களது வெட்டு (Intersection of two sets A, B), $A \cap B$ எனக் குறிப்பிடப்படும். $A \cap B$ என்பது A, B கணங்களது பொது மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கணமாகும்.

குறியீட்டின்படி,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, d, e, f,\}$ எனின்,

$A \cap B = \{c, d\}$.

2. $A = \{x \mid x$ ஓர் ஒற்றை எண்$\}$

$B = \{y \mid y$ ஓர் இரட்டை எண்$\}$

$A \cap B = \{z \mid z$ ஓர் ஒற்றை எண்,

z ஓர் இரட்டை எண்$\}$

$= \phi$ பூச்சியக்கணம்.

6·16. வெட்டின் பண்புகள்

(1) மாற்று விதி (Commutative Law)

$$A \cap B = B \cap A,$$

எடுத்துக்காட்டு :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$ எனின்,

$A \cap B = \{3, 4\}$

$= B \cap A.$

(2) சேர்ப்பு விதி (Associative law)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

எடுத்துக் காட்டு :

$A = \{a, b, c\}$

$B = \{b, c, d\}$

$C = \{c, d, e\}$ எனின்,

$$B \cap C = \{c, d\}$$
$$A \cap (B \cap C) = \{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$$
$$A \cap B = \{b, c\}$$
$$(A \cap B) \cap C = \{b, c\} \cap \{c, d, e\} = \{c\}$$

$\therefore \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

(3) பங்கீட்டு விதி (Distributive law)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

எடுத்துக் காட்டு :

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$
$$B = \{ 3, 4, 5 \}$$
$C = \{ 5, 6\ 3 \}$ எனின்,
$$B \cup C = \{ 3, 4, 5, 6 \}.$$

$$A \cap (B \cup C) = \{ 1, 2, 3 \} \cap \{ 3, 4, 5, 6 \}$$
$$= \{ 3 \}$$
$$A \cap B = \{ 1, 2, 3 \} \cap \{ 3, 4, 5 \} = \{ 3 \}$$
$$A \cap C = \{ 1, 2, 3 \} \cap \{ 5, 6, 3 \} = \{ 3 \}$$
$$\therefore \; (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{ 3 \} \cup \{ 3 \}$$
$$= \{ 3 \}$$

$$\therefore \; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) $A \cap A = A$

(5) $A \cap \phi = \phi.$

6-17. கணங்களின் வேறுபாடு (Difference of sets)

A, B என்ற இரு கணங்களின் வேறுபாடு $(A - B)$ என்று குறிப்பிடப்படும். $(A - B)$ என்பது B-ல் இல்லாத, ஆனால் A-ல் மட்டும் இருக்கின்ற மூலகங்களைக் கொண்ட கணமாம்

இது குறியீட்டின்படி,

$$A - B = \{ x \mid x \in A,\; x \in B \}.$$

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \{ 3, 4, 5, 6 \}$$

$$B = \{ 3, 6 \} \text{ எனின்}$$

$$A - B = \{ 4, 5 \}$$

6-18. ஒரு கண நிரப்பி (Complement of a set)

பொதுவான கணம் (Universal set) $\cup$ -ல் A ஒரு கணமெனின், A-ன் நிரப்பி $\cap - A$ எனும் கணமாகும். இது A' எனக் குறிப்பிடப்படும். A' என்ற கணம் A-ல் இல்லாத, ஆனால் $\cap$-ல் மட்டும் இருக்கின்ற மூலகங்கள் கொண்டதாகும்.

அதாவது, $A' = \cup - A = \{ x \mid x \in \cup, x \notin A \}$

எடுத்துக்காட்டு :

பொதுவானக் கணம் $\cup = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

$A = \{ 1, 3, 5, \dots \}$ எனின்,

$A' = \cup - A = \{ 2, 4, 6, \dots \}$

குறிப்பு :

(1) $A \cup A' = \cup$

(2) $A \cap A' = \phi$

(3) $(A')' = A$

(4) $\cup' = \phi$.

6-19. டி மோர்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws)

(1) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

6-20. வரிசைப்பட்ட சோடி (Ordered Pair)

A, B இரு கணங்களெனவும், $x \in A$, $y \in B$ எனவும் கொள்வோம். பின் (x, y) என்பது வரிசைப்பட்ட சோடி எனப்படும். (அதாவது) வரிசைப்பட்ட சோடி எனின், இதன் முதல் மூலகம் முதல் கணத்தையும், இரண்டாவது மூலகம் இரண்டாவது கணத்தையும் சேர்ந்தவையாம்.

எனவே, (x, y), (y, x) எனும் சோடிகள் வெவ்வேறானவை.

$\therefore$ $x = u$, $y = v$ என்றால் மட்டுமே (x, y), (u, v) என்ற சோடிகள் சமமாகும்.

6-21. கணங்களின் பெருக்கம் (Product of Sets)

A, B என்பவை இரு கணங்களெனக் கொள்வோம். $A \times B$ என்ற தெக்கார்ட்டின் பெருக்கம் (Cartesian product), வரிசைப் பட்ட சோடிகளைக் கொண்ட கணமாகும். இச் சோடிகளில் முதலிலுள்ள மூலகங்கள் A கணத்தையும், இரண்டாவது மூலகங்கள் B கணத்தையும் சேர்ந்தவையாகும்.

குறியீட்டில்,

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, \ y \in B \} .$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) $A = \{ 1, 2, 3 \}$.

$B = \{ 1, 2 \}$ எனின்,

$$A \times B = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \}$$

$$B \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3) \} .$$

$\therefore$ $A \times B \neq B \times A$.

(2) $A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ x, y \}$

$$A \times B = \{ (1 \times x), (1 \times y), (2 \times x), (2 \times y), (3 \times x), (3 \times y) \}$$

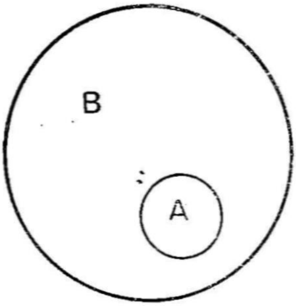
$$B \times A = \{ (x \times 1), (x \times 2), (x \times 3), (y \times 1), (y \times 2), (y \times 3) \}$$

$\therefore$ $A \times B \neq B \times A$.

6-22. வெண்-ஆய்லர் படங்கள் (Venn-Euler Diagrams)

கணங்களது உருவ விளக்கங்கள் வெண்-ஆய்லர் படங்கள் மூலம் சித்திரிக்கப் படுகின்றன. வெண்-ஆய்லர் படங்கள் செவ் வகமும் வட்டமும் கொண்டவையாகும்.

கணங்களையும், அவற்றின் செய்கைகள் சிலவற்றையும் பின் வரும் படங்கள் மூலம் விளக்குவோம்.

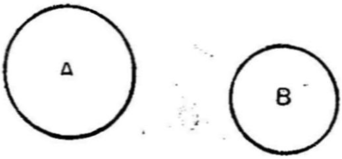


$A \subseteq B$

$B \supseteq A$

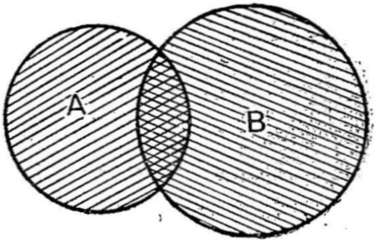
B கணத்தின் கீழ்க்கணம் A.

படம் 2.



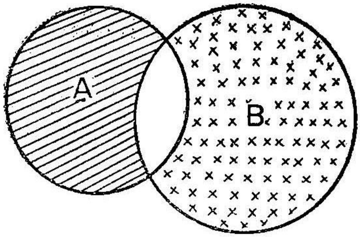
படம் 3.

A, B என்பவை ஒன்றாத கணங்களாகும்.



படம் 4.

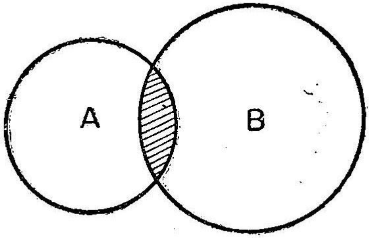
கோடிட்ட பகுதிகள் $A \cup B$.



படம் 5.

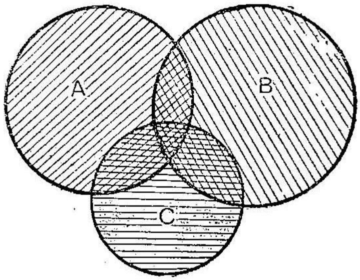
கோடுகளிட்ட பகுதி $(A - B)$

× குறிகளிட்ட பகுதி $(B - A)$



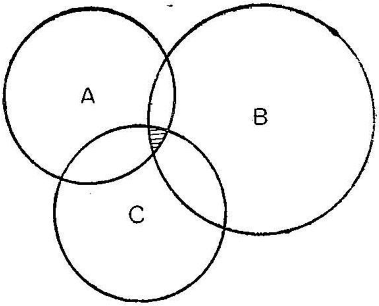
படம் 6.

கோடுகளிட்ட பகுதி $A \cap B$.



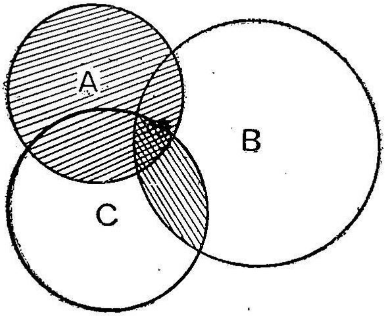
படம் 7.

கோடுகளிட்ட பகுதி $A \cup (B \cup C)$



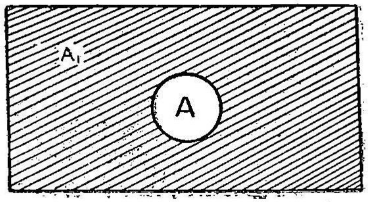
படம் 8.

கோடிட்ட பகுதி $(A \cap B) \cap C$



படம் 9.

கோடிட்ட பகுதி $A \cup (B \cap C)$



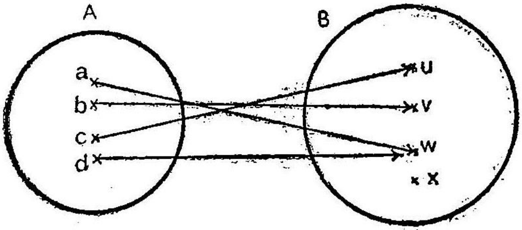
படம் 10.

கோடிட்ட பகுதி $A' = \cup - A$

6-23. உருமாற்றம் (Mapping)

A, B என்பவை இரு கணங்களெனவும் A-லுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் B-லுள்ள ஒரு மூலகத்துடன் ஒரே முறையில் தொடர்பு படுத்தும் சில விதிகள் உள்ளன எனவும் கொள்வோம். இவ்வாறு A கணத்தை B கணத்துடன் தொடர்பு படுத்துவது உருமாற்றம் எனப்படும்.

இவ்வுரு மாற்றம் f என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்பட்டு $f: A \to B$ என்றோ அல்லது $A \xrightarrow{f} B$ என்றோ எழுதப்படும்.



படம் 11.

மேலே உள்ள படத்தில் $a, d \in A$ மூலகங்கள் $w \in B$ மூலகத்துடனும், $b \in A$ மூலகம் $v \in B$ மூலகத்துடனும், $c \in A$ மூலகம் $u \in B$ மூலகத்துடனும் தொடர்பு படுத்தப்பட்டுள்ளது.

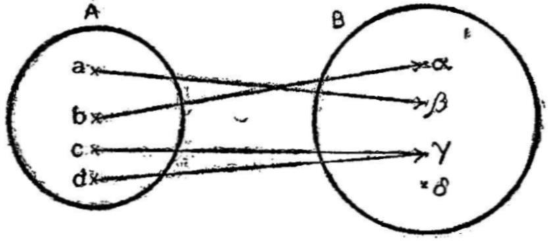
$$w = f(a), \qquad v = f(b)$$
$$u = f(c), \qquad w = f(d).$$

A கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் B கணத்தின் ஒத்த மூலகங்களது முந்தைய விம்பங்கள் (Pre Images) எனப்படும். மேலும், B-லுள்ள மூலகங்கள் A-லுள்ள ஒத்த மூலகங்களது f விம்பங்கள் எனப்படும்.

6-24. உள், மேல் உருமாற்றங்கள் (Into and Onto Mapping)

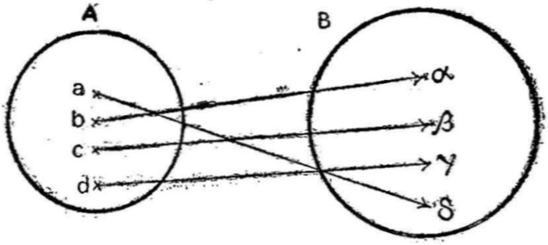
B கணத்திலுள்ள மூலகங்களில் எவையாயினும் சில மூலகங்கள் A-லுள்ள மூலகங்களுடன் தொடர்பில்லாமலிருப்பின், அவ்வகை உருமாற்றம் உள் உருமாற்றம் (Into mapping) எனப்படும். B-லுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் A-லுள்ள மூலகங்களுடன் தொடர்பு படுத்தப்பட்டிருப்பின், அவ்வகை உருமாற்றம் (Onto mapping) எனப்படும்.

உள் உருமாற்றம் (Into mapping)



படம் 12.

மேல் உருமாற்றம் (Onto Mapping)

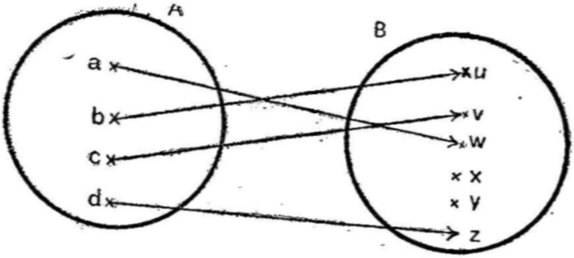


படம் 13.

6-25. ஒன்றுக் கொன்றான உருமாற்றம் (One to One Mapping)

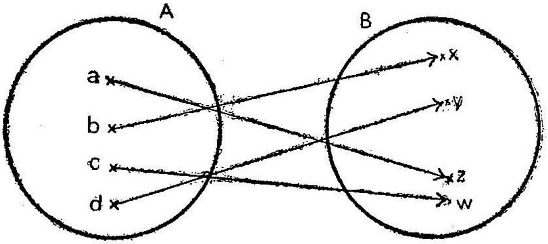
உருமாற்றம் $f: A \to B$ என்பது, A கணத்திலுள்ள வெவ்வேறு மூலகங்களுக்கு வெவ்வேறு விம்பங்கள் B-ல் இருக்குமாறு அமைந்தால், ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் எனப்படும்.

ஒன்றுக்கொன்றான உள் உருமாற்றம்



படம் 14.

ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றம்

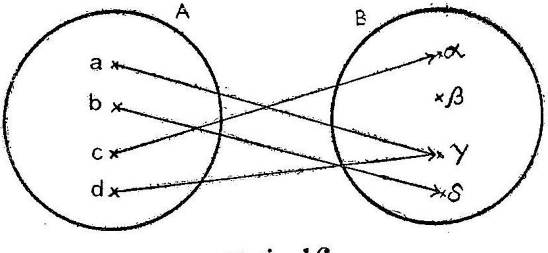


படம் 15.

6-26. அனேக ஒன்று உள் உருமாற்றம் (Many one into Mapping)

B கணத்திலுள்ள மூலகங்களில் குறைந்தது ஒன்றிற்காவது *A* கணத்திலுள்ள மூலகங்களில் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மூலகங்களுடன் தொடர்பிருந்து, *B*-லுள்ள மூலகங்களில் குறைந்தது ஒன்றுக்காவது *A*-லுள்ள மூலகங்களுடன் தொடர்பின்றி இருப்பின், அவ்வகை உருமாற்றம் (அனேக ஒன்று உள் உருமாற்றம்) எனப்படும்.

அனேக ஒன்று உள் உருமாற்றம்



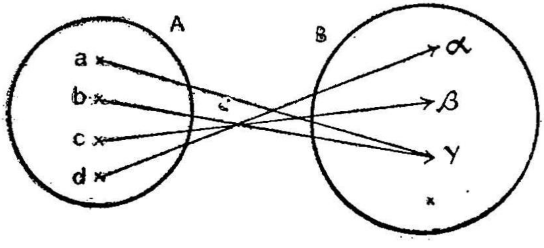
படம் 16.

6-27. அனேக ஒன்று மேல் உருமாற்றம் (Many one onto Mapping)

B-லுள்ள மூலகங்களில் குறைந்தது ஒன்றிற்காவது *A*-லுள்ள மூலகங்களில் இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட மூலகங்களுடன் தொடர்பிருந்து, *B*-லுள்ள மூலகங்கள்

அனைத்தும் A-ன் f-விம்பங்களாக விருப்பின், அவ்வகை உருமாற்றம் அனேக ஒன்று மேல் உருமாற்றம் எனப்படும்.

அனேக ஒன்று மேல் உருமாற்றம்



படம் 17.

6-28. சர்வ சம உருமாற்றம் (Identity Mapping)

ஒரு கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் ஓர் உருமாற்றம் அதன் மீதே உருமாற்றினல், அவ்வகை உருமாற்றம் சர்வசம உருமாற்றம் எனப்படும். வரையறையிலிருந்து சர்வசம உருமாற்றம் ஒன்றுக்கொன்ருன உருமாற்றம் என்ருகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

$$f = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \}$$

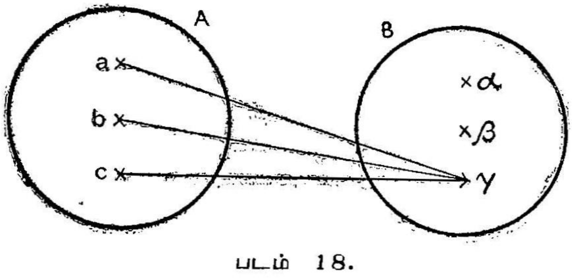
எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $a \to a$, $b \to b$, $c \to c$, $d \to d$. ஆதலின் f ஒரு சர்வசம உருமாற்றமாகும்.

6-29. நிலையான உருமாற்றம் (Constant Mapping)

$f : A \to B$ என்பது A-லுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றினது விம்பமும் B-லுள்ள ஒரே மூலகமெனின், அவ்வகை உருமாற்றம் நிலையான உருமாற்றம் எனப்படும்.

நிலையான உருமாற்றம்



படம் 18.

6-30. நேர்மாறான உருமாற்றம் (Inverse Mapping)

$f: A \to B$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றம் எனக் கொள்வோம். எனவே B-லுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரே ஒரு மூலகம் A-ல் இருக்கும். எனவே, B-லுள்ள y என்ற ஒவ்வொரு மூலகமும் A-லுள்ள x என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்தின்மீது உருமாற்றப்படுகிறது என B-லிருந்து A-க்கு உருமாற்றம் செய்யலாம். இவ்வகை உருமாற்றம் f-ன் நேர்மாறான உருமாற்றம் எனப்பட்டு f^{-1} எனக் குறியிடப்படும்.

$$\therefore \quad f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

இங்கு $x \in A, \quad y \in B.$

மாதிரி 1 :

$f(x) = x^2 - 4$ என்ற மெய்யெண்களின் கணம் R எனவும், $f: R \to R$ எனவும் கொண்டால், $f^{-1}(12), f^{-1}(5), f^{-1}(-8)$ காண்க.

$$\begin{aligned} f^{-1}(12) &= \{ x \in R : f(x) = 12 \} \\ &= \{ x \in R : x^2 - 4 = 12 \} \\ &= \{ x \in R : x^2 = 16 \} \\ &= \{ x \in R : x = \pm 4 \} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f^{-1}(12) = \pm 4.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(5) &= \{ x \in R : f(x) = 5 \} \\ &= \{ x \in R : x^2 - 4 = 5 \} \\ &= \{ x \in R : x^2 = 9 \} \\ &= \{ x \in R : x = \pm 3 \} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f^{-1}(5) = \pm 3.$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(-8) &= \{ x \in R : f(x) = -8 \} \\ &= \{ x \in R : x^2 - 4 = -8 \} \\ &= \{ x \in R : x^2 = -4 \} \\ &= \phi \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f^{-1}(-8) = \phi.$$

மாதிரி 2 :

நிறுவுக : $A \cap (B-A) = \phi$.

$$x \in A \cap (B-A) \Longrightarrow x \in A,\ x \in (B-A)$$
$$\Longrightarrow x \in A,\ x \notin A,\ x \in B.$$
$$\Longrightarrow x \in \phi,\ x \in B$$
$$\Longrightarrow x \in \phi \cap B$$
$$\Longrightarrow x \in \phi.$$

$\therefore\ A \cap (B-A) \subseteq \phi.$

$\phi \subseteq A \cap (B-A)$

$\therefore\ A \cap (B-A) = \phi.$

பயிற்சி 6

(1) n மூலகங்கள் கொண்ட கணத்திலிருந்து எத்தனை கீழ்க் கணங்கள் அமைக்கக்கூடும்? அவற்றில் தகு கணங்களின் எண்ணிக்கையையும், தகா கணங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ எனின், A கணத்தின் கீழ்க்கணங்களை எழுதுக. அவற்றுள் தகு கணங்களின் எண்ணிக்கையையும் தகா கணங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

(3) கீழ்வரும் கணங்களுக்குள் உள்ள தொடர்பு யாது?

$A = \{x : SLATE$-ல் x ஓர் எழுத்து $\}$

$B = \{x : TALES$-ல் x ஓர் எழுத்து $\}$

$C = \{x : ELATES$-ல் x ஓர் எழுத்து $\}$

(4) பின்வரும் கணங்களுக்குள் உள்ள தொடர்பு யாது?

$A = \{G, L, A, S, S\}$

$B = \{L, A, S, S\}$

$C = \{A, S, S\}$

(5) பின்வரும் கணங்களுக்குள் உள்ள தொடர்பு காண்க.

$$A = \{ F, O, L, L, O, W \}$$
$$B = \{ F, L, O, W \}$$
$$C = \{ W, O, L, F \}.$$

(6) நிரூபி : $A-(B\cap C) = (A-B) \cup (A-C)$.

(7) நிரூபி : $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

(8) நிரூபி : $(A-B) \cup (B-A) = (A\cup B) - (A\cap B)$.

(9) $f(x) = x^2 + 2$, $f : R \rightarrow R$ எனின், $f^{-1}(6)$, $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(5)$ காண்க.

(10) பின்வரும் உருமாற்றங்கள் எத்தகையது எனக்கூறுக.

$A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$

(i) (a, γ), (b, α), (c, β)

(ii) (a, γ), (c, α)

(iii) (a, γ), (b, α), (c, β), (d, γ)

(iv) (a, β), (b, β), (c, β), (d, β).

(v) (a, α), (b, α), (c, β), (d, β).

விடைகள்

(1) 2^n ; தகு கணங்கள் $2^n - 1$; தகா கணம் 1.

(2) 2^4 ; தகு கணங்கள் $2^4 - 1 = 15$; தகா கணம் 1.

(3) $A = B = C$.

(4) $C \subset A$, $B \subset A$, $C \subset B$.

(5) $A = B = C$.

(9) $(2, -2)$, $(+\sqrt{6}, +\sqrt{6})$, ϕ.

(10) (i) ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றம்.

(ii) எவ்வகை உருமாற்றமுமல்ல.

(iii) அனேக ஒன்று மேல் உருமாற்றம்.

(iv) நிலையான உருமாற்றம்.

(v) அனேக ஒன்று உள் உருமாற்றம்.

7 குலங்கள்

(Groups)

7-1. இணைச் சேர்க்கை (Binary Composition)

வரையறை

A ஒரு காலியில்லாத கணம் (non-empty set), $x, y \in A$ எனின், $x \, 0 \, y \in A$ என்ற 0 எனக் குறிப்பிடப்பெறும் ஒரு சேர்க்கை A-ல் இணைச் சேர்க்கை (Binary Composition) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) I எனும் முழு எண்களின் கணத்தில் கூட்டல் $+$, கழித்தல் $-$, பெருக்கல் . என்ற செய்கைகள் அனைத்தும் இணைச் சேர்க்கைகளாகும்

$$\because \quad x \, 0 \, y = x + y = \text{ஒரு முழு எண்} \in I$$

$$x \, 0 \, y = x - y = \text{ஒரு முழு எண்} \in I$$

$$x \, 0 \, y = x \cdot y = \text{ஒரு முழு எண்} \in I$$

ஆனால் வகுத்தல் $\div$ செய்கை இணைச் சேர்க்கை ஆகாது. ஏனெனில், $x \, 0 \, y = x \div y$ என்பது ஒரு முழு எண்ணாகத்தான் இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை.

ஆகவே, இணைச் சேர்க்கை என்பது, ஒரு கணத்திலுள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்களுக்கு அதே கணத்திலுள்ள ஒரு மூலகத்தை ஒரே முறையில் அளிக்கும் ஒரு விதியாகும்.

எனவே, $x \, 0 \, y = x \div y$ என்பது முழு எண்களின் கணத்தின் இணைச் சேர்க்கையல்ல. ஆனால், இது பூச்சியமில் விகிதமுறு எண்களது கணத்தின் இணைச் சேர்க்கை என்பது தெளிவு.

(2) அனைத்து $m \times n$ அணிகளது கணத்தில் கூட்டல், கழித்தல் செய்கைகள் இணைச் சேர்க்கைகளாகும். ஏனெனில், A, B இரண்டும் $m \times n$ அணிகளெனின் $A + B$, $A - B$ என்ற அணிகளும் $m \times n$ அணிகளாகும். எனவே, இவை $m \times n$ அணிகளது கணத்தைச் சேர்ந்தவையாம்.

இவ்வாறே அனைத்து $n \times n$ அணிகளது கணத்தில் பெருக்கல் செய்கை ஓர் இணைச் சேர்க்கையாகும்.

(3) இரு இரட்டை இயற்கை எண்களது கூடுதல் ஒரு இரட்டை இயற்கை எண்ணாதலின், கூட்டல் செய்கை இரட்டை இயற்கை எண்களது கணத்தில் இணைச் சேர்க்கையாகும். ஆனால், இரு ஒற்றை இயற்கை எண்களது கூடுதல் ஓர் இரட்டை இயற்கை எண் ஆதலின், ஒற்றை எண்களது கணத்தில் கூட்டல் செய்கை இணைச் சேர்க்கையாகாது.

7-3. இணைச் சேர்க்கைகளின் வகைகள் (Types of Binary Compositions)

(1) பரிமாற்று இணைச் சேர்க்கை (Commutative Composition)

A என்ற கணத்தில்,

$$x\,0\,y = y\,0\,x \quad \forall\, x, y \in A$$

எனின், 0 என்ற இணைச் சேர்க்கை பரிமாற்று இணைச் சேர்க்கை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

அனைத்து இயற்கை எண்களது கணம் N-ல் கூட்டல், பெருக்கல் செய்கைகள் பரிமாற்று இணைச் சேர்க்கைகளாகும்.

ஆனால்,

$$x - y \neq y - x \quad \forall\, x, y \in N$$

$$x \div y \neq y \div x \quad \forall\, x, y \in N$$

எனவே கழித்தல், வகுத்தல் செய்கைகள் கணம் N-ல் பரிமாற்று இணைச் சேர்க்கைகளாகா.

(2) சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கை (Associative Composition)

A என்ற கணத்தில்,

$$(x\,0\,y)\,0\,z = x\,0\,(y\,0\,z), \quad \forall\, x, y, z \in A$$

எனின், 0 என்ற இணைச் சேர்க்கை சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. R எனும் விகிதமுறு எண்களது கணத்தில்,

$$(x \, 0 \, y) \, 0z = x \, 0 \, (y \, 0 \, z), \quad \forall \, x, y, z \in R$$

அதாவது $(x+y)+z = x + (y+z), \quad \forall \, x, y, z \in R$

$$(x \, . \, y) \, . \, z = x \, . \, (y \, . \, z), \quad \forall \, x, y, z \in R.$$

எனவே கூட்டல், பெருக்கல் செய்கைகள் கணம் R-ல் சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கைகளாகும்.

(2) $A, B \, C$ என்பவை மூன்று $m \times n$ அணிகளெனின்,

$$(A \, 0 \, B) \, 0C = (A + B) + C$$
$$A0 \, (B \, 0 \, C) = A + (B + C)$$

$m \times n$ அணிகளின் கணத்தில்

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

∴ கூட்டல் செய்கை அனைத்து $m \times n$ அணிகளது கணத்தில் சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கையாகும்.

மாதிரி 1 :

A என்ற கணத்தில் 0 எனும் இணைச் சேர்க்கை

$$x \, 0 \, y = x + 6y, \; \forall \, x, y \in A$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின், இது சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கை என நிறுவுக.

$$(x \, 0 \, y) \, 0 \, z = (x + 6y) \, 0z$$
$$= x + 6y + 6z$$

$$x0 \, (y \, 0 \, z) = x0 \, (y + 6z)$$
$$= x + 6 \, (y + 6z)$$
$$= x + 6y + 36z.$$

$$\therefore \quad x0 \, (y0 \, z) \neq (x0 \, y) 0 \, z$$

எனவே, இது சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கையல்ல.

மாதிரி 2 :

ϕ என்ற விகிதமுறு எண்களது கணத்தில் 0 எனும் இணைச் சேர்க்கை,

$$x\,0\,y = x + y + xy, \ \forall\, x, y \in \phi$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின், இது சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கை என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} x\,0\,(y\,0\,z) &= x\,0\,(y + z + yz) \\ &= x + (y + z + yz) + x\,.\,(y + z + yz) \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz. \\ &= x + y + z + xy + yz + xz + xyz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x\,0\,x)\,0\,z &= (x + y + xy)\,0\,z \\ &= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)\,.\,z \\ &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \\ &= x + y + z + xy + yz + xz + xyz. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x\,0\,(y\,0\,z) = (x\,0\,y)\,0\,z.$$

எனவே இச் செய்கை சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கையாகும்.

7-4. சர்வ சம மூலகம் (Identity Element)

A என்ற ஒரு கணத்தில் யாதேனும் ஒரு மூலகத்தை அதே கணத்திலுள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட மூலகத்துடன் ஓர் இணைச் சேர்க்கையின் மூலம் சேர்ப்பதால் முதலில் கூறப்பட்ட மூலகம் எவ்விதத்திலும் மாற்றப்படவில்லை எனின், அக் குறிப்பிட்ட மூலகம் A கணத்தின் சர்வ சம மூலகம் எனப்படும்.

அதாவது A என்ற கணத்தில் e எனும் ஒரு மூலகம்,

$$a\,0\,e = e\,0\,a, \ \forall\, a \in A$$

என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருப்பின், அது A கணத்தின் சர்வ சம மூலகம் எனப்படும். இதை e எனக் குறியிடுவது மரபு.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) R எனும் அனைத்து மெய்யெண்களின் கணத்தில்,

$$x + 0 = x \quad \forall\, x \in R$$

இங்கு 0 சர்வ சம மூலகமாகும்.

அதாவது R கணத்தில் கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் சர்வ சம மூலகம் 0.

(2) மெய் அல்லது விகிதமுறு எண்களின் கணம் R-ல்

$$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x \quad \forall x \in R$$

எனவே, கணம் R-ல் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் சர்வ சம மூலகம் 1.

3. அனைத்து $m \times n$ அணிகளது கணத்தில் சர்வ சம மூலகம் கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு $m \times n$ பூச்சிய அணியாகும்.

மேலும், அனைத்து $n \times n$ அணிகளது கணத்தில் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் $n \times n$ அணி அலகு (Unit matrix) சர்வ சம மூலகமாகும்.

7-5. நேர்மாறு மூலகம் (Inverse Element)

A என்ற கணத்திலுள்ள x எனும் ஒவ்வொரு மூலகத்தும் y எனும் ஒரு மூலகம்,

$$x \, 0 \, y = y \, 0 \, x = e$$

என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருப்பின், y மூலகம் A கணத்தில் x-ன் நேர்மாறு மூலகம் எனப்படும். இது x^{-1} எனக் குறியிடப்படும்.

அதாவது x-ன் நேர்மாறு மூலகம் x^{-1} எனின்,

$$x^{-1} \, 0 \, x = x \, 0 \, x^{-1} = e.$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. பூச்சியமில் எண்களது கணத்தில் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின்கீழ் சர்வசம மூலகம் 1 ஆகும். எனவே, இக் கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் x-க்கும் x^{-1} என்ற நேர்மாறு மூலகம் உண்டு.

$$\therefore \quad x^{-1} \, 0 \, x = 1 = x \, 0 \, x^{-1}.$$

2. இயற்கை எண்களது கணத்தில் இணைச்சேர்க்கை பெருக்கல் எனின், x என்ற எந்த ஒரு மூலகத்திற்கும் நேர்மாறு மூலகம் x^{-1} ஆகும். $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ஒரு முழு எண் அல்ல. எனவே, இக் கணத்தில் ஒன்றை நீக்கி மற்ற எந்த எண்ணுக்கும் நேர்மாறு மூலகம் கிடையாது .

மாதிரி 3 :

$A = \{X, Y, Z, W\}$

$X = \phi, Y = \{a\}, Z = \{a, b\}, W = \{a, b, c\}$

எனின், கணம் A-ல் இணைச் செய்கைகள் $\cup$, $\cap$ என நிறுவுக.

$X \cup Y = \phi \cup \{a\} = \{a\} = Y \in A$

$X \cup Z = \phi \cup \{a, b\} = \{a, b\} = Z \in A$

$X \cup W = \phi \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}\ W \in A$

$Y \cup Z = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} = Z \in A$

$Y \cup W = \{a\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\} = W \in A$

$Z \cup W = \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\} = W \in A.$

$\therefore$ $\cup$ என்பது ஓர் இணைச் செய்கையாகும்.

$X \cap Y = \phi \cap \{a\} = \phi = X \in A$

$X \cap Z = \phi \cap \{a, b\} = \phi = X \in A$

$X \cap W = \phi \cap \{a, b, c\} = \phi = X \in A$

$Y \cap Z = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}\ Y \in A$

$Y \cap W = \{a\} \cap \{a b c\} = \{a\} = Y \in A$

$Z \cap W = \{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\} = Z \in A.$

$\therefore$ $\cap$ என்பதும் ஓர் இணைச்செய்கை (Binary operation) ஆகும்.

7-6. குலங்கள் (Groups)

பின்வரும் விதிகள் பொருந்தும், ஓர் இணைச் செய்கை கொண்ட வெறுமையற்ற கணம் G ஒரு குலம் எனப்படும்.

(1) $x \mathrm{O}\, y \in G\ \forall\ x, y \in G.$

(2) $x \mathrm{O} (y \mathrm{O} z) = (x \mathrm{O} y) \mathrm{O} z\ \ \forall\ x, y, z \in G.$

(3) G-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் x-க்கும் இடது சர்வசம மூலகம் (Left Identity) எனப்படும். e எனும் மூலகம் $e \mathrm{O} x = x$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கவேண்டும்.

(4) நேர்மாறு மூலகம் இருக்க வேண்டும். அதாவது G-ல் உள்ள x எனும் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $x^{-1} \in G$ என்ற ஒரு மூலகம்

$$x^{-1} \mathrm{O}\, x = e$$

என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு :

கணங்கள் அனைத்தும் குலங்களல்ல. ஆனால் குலங்கள் அனைத்தும் கணங்களாகும்.

7-7. முடிவுள்ள தொகுதி (Finite Group)

ஒரு குலம் அல்லது தொகுதியிலுள்ள மூலகங்களது எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதெனின், அக் குலம் ஒரு முடிவுள்ள குலம் எனப்படும். முடிவிலி எண்ணிக்கையுள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட குலம் முடிவிலி குலம் அல்லது முடிவிலி தொகுதி (Infinite Group) எனப்படும்.

7-8. அபெலியன் குலம் (Abelian Group)

ஒரு குலத்திலுள்ள மூலகங்களுக்கு மாற்று விதி பொருந்துமெனின், அக் குலம் அபெலியன் குலம் எனப்படும்.

அதாவது அபெலியன் குலத்தில்,

$$x \, 0 \, y = y \, 0 \, x$$

$\therefore \quad x + y = y + x$ (கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை)

$\quad x \cdot y = y \cdot x$ (பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை)

அபெலியன் தொகுதி, பரிமாற்றுத் தொகுதி (Commutative Group) என்வும் கூறப்படும்.

7-9. தொகுதியின் வரிசை (Order of a Group)

ஒரு முடிவுள்ள தொகுதியிலுள்ள மூலகங்களது எண்ணிக்கை அத் தொகுதியின் வரிசை எனப்படும். முடிவிலி தொகுதியின் வரிசை முடிவிலியாகும். முடிவிலி தொகுதி 0 வரிசை கொண்ட தொகுதியெனவும் கூறப்படும்.

மாதிரி 4 :

கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் முழு எண்களது கணம் I ஒரு தொகுதி என நிறுவுக.

தொகுதிக்கான விதிகள் கணம் I-ல் பொருந்தும் என நாம் நிறுவினால், I ஒரு குலம் என்றாகும்.

(1) $x \, 0 \, y = x + y \in I \quad \forall \, x, y \in I$

இரு முழு எண்களின் கூடுதல் ஒரு முழு எண்ணாதலின், முதல் விதி பொருந்தும் என அறிகிறோம்.

(2) x, y, z என்பன I ஐச் சேர்ந்த மூன்று முழு எண்களெனின்,

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

எனவே சேர்ப்பு விதி பொருந்துகிறது.

(3) சர்வசம மூலகம் 0 என்பது தெளிவு.

$$\because \quad x + 0 = x \quad \forall\, x \in I$$

(4) $x + (-x) = 0 \quad \forall\, x \in I$

எனவே, x-ன் நேர்மாறு மூலகம் $-x \in I$ அதாவது I என்ற கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கு ஒரு நேர்மாறு மூலகம் உண்டு. ஆகவே, முழு எண்களது கணம் ஒரு தொகுதியாகும்.

மேலும், I என்ற கணத்தில் மாற்று விதியும் பொருந்துகிறது.

$$\because \quad x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in I$$

எனவே, தொகுதி I ஒரு அபெலியன் தொகுதியாகும்.

மாதிரி 5 :

அனைத்து ஒற்றை முழு எண்களைக் கொண்ட கணம் A, கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஓர் தொகுதியாகாது என நிறுவுக.

இரு ஒற்றை முழு எண்களின் கூடுதல் ஓர் இரட்டை எண் ஆகும்.

$$\text{அதாவது} \quad x \mathrel{O} y = x + y \notin A$$

எனவே, கணம் A ஒரு தொகுதி அல்ல.

மாதிரி 6 :

அனைத்து சிக்கலெண்களது கணம் C கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு முடிவிலி அபெலியன் தொகுதி என நிறுவுக.

கணம் C-ன் எவையேனும் மூன்று சிக்கலெண்கள்

$$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$$
$$z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$
$$z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

எனக் கொள்வோம்.

(1) $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$

$$= (\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + i\beta_2) \in C.$$

(2) $z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$

$z_2 + z_3 = (\alpha_2 + \alpha_3) + i(\beta_2 + \beta_3).$

$$z_1 + (z_2 + x_3) = (\alpha_1 + i\beta_1) + \{(\alpha_2 + \alpha_3) + i(\beta_2 + \beta_3)\}$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = \{(\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)\} + (\alpha_3 + i\beta_3)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + i(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

$\therefore \; z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$

(3) $(\alpha_1 + i\beta) + (0 + i\,0) = (\alpha_1 + 0) + i(\beta + 0)$

$$= \alpha_1 + i\beta$$

எனவே சர்வசம மூலகம் $0 + i\,0 \in C.$

(4) $z + (-z) = (\alpha + i\beta) + (-\alpha - i\beta)$

$$= (\alpha - \alpha) + i(\beta - \beta)$$

$$= 0 + i0 \in C.$$

எனவே, ஒவ்வொரு மூலகம் z-க்கும் ஒரு நேரெதிர் மூலகம் $-z$ உண்டு.

(5) மாற்று விதி

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$$

$$z_2 + z_1 = (\alpha_2 + \alpha_1) + i(\beta_2 + \beta_1)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$$

$\therefore \; z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

அதாவது மாற்று விதி பொருந்தும்.

மீண்டும் கணம் C-லுள்ள மூலகங்கள் எண்ணிக்கை முடிவிலியாகும்.

எனவே, கணம் C ஒரு முடிவிலி அபெலியன் தொகுதி ஆகும்.

மாதிரி 7 :

ஒன்றின் முப்படி மூலகங்களைத் தனது மூலகங்களாகக் கொண்ட ஒரு கணம், பெருக்கல், இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் தொகுதி என நிறுவுக.

ஒன்றின் முப்படி மூலகங்கள் கொண்ட கணம் G என்க.

$$G = \{ 1, \omega, \omega^2 \}.$$

(i) பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை :

$$1 . \omega = \omega \in G$$

$$1 . \omega^2 = \omega^2 \in G$$

$$\omega . \omega^2 = \omega^3 = 1 \in G$$

(ii) சேர்ப்பு விதி :

$$1 . (\omega . \omega^2) = \omega^3 = (1 . \omega)\,\omega^2, \text{ முதலியன.}$$

$\therefore$ சேர்ப்பு விதி பொருந்துகிறது.

(iii) சர்வ சம மூலகம் : 1 ஆகும்.

$$\therefore \quad 1 . 1 = 1 \in G$$

$$1 . \omega = \omega \in G$$

$$1 . \omega^2 = \omega^2 \in G$$

$$1 . \omega^3 = \omega^3 \in G.$$

(iv) நேர்மாறு மூலகம் :

$1, \omega, \omega^2$ மூலகங்களது நேர்மாறு மூலகங்கள் முறையே $1, \omega^2, \omega$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 1^{-1} = 1 \in G$$

$$\omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2}{\omega^3} = \omega^2 \in G$$

$$(\omega^2)^{-1} = \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega \in G.$$

(v) மாற்று விதி :

$$1.\omega = \omega.1 = \omega \in G$$
$$1.\omega^2 = \omega^2.1 = \omega^2 \in G$$
$$1.\omega^3 = \omega^3.1 = \omega^3 \in G$$
$$\omega.\omega^2 = \omega^2.\omega = \omega^3 \in G$$
$$\omega^2.\omega^3 = \omega^3.\omega^2 = \omega^2 \in G.$$

எனவே மாற்று விதியும் பொருந்துகிறது.

மேலும் G–லுள்ள மூலகங்களது எண்ணிக்கை 3 ஆதலின், இது ஒரு முடிவுள்ள தொகுதியாகும். எனவே, G ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் குலம்.

மாதிரி 8 :

$G = \{1, -1, i, -i\}$ என்பது பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் குலம் என நிறுவுக.

கணம் G, ஒரு தொகுதிக்கான விதிகள் அனைத்துக்கும் பொருந்துகிறது என முதலில் நிறுவுவோம்.

(i) இணைச்சேர்க்கை (Binary composition) :

$$1.(-1) = -1 \in G$$
$$1.i = i \in G$$
$$1.(-1) = -i \in G$$
$$(-1).(-i) = i \in G$$
$$i -i = i^2 = 1 \in G$$

எனவே, பெருக்கல் இணைச்சேர்க்கை கணம் G-ல் உண்டு.

(ii) சேர்ப்பு விதி (Associative Law) :

$$(1.i)(-i) = 1.\{(i).(-i)\} = 1$$

இது அனைத்து மூலகங்களுக்கும் பொருந்துமாதலால், சேர்ப்பு விதி கணம் G-க்குப் பொருந்தும்.

(iii) சர்வசம மூலகம் (Identity) :

$$1.1 = 1 \in G$$
$$1.(-1) = -1 \in G$$

$$1.i \quad = i \quad \in G$$

$$1.(-i) = -i \quad \in G$$

எனவே, கணம் G-ல் சர்வசம மூலகம் 1 ஆகும்.

(iv) நேர்மாறு மூலகம் (Inverse):

கணம் G-ல் உள்ள மூலகங்கள் $1, -1, i, -i$, இவற்றின் நேர்மாறு மூலகம் முறையே $1, -1, -i, i$. அதாவது G-லுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்துக்கும் ஒரு நேர்மாறு மூலகம் உண்டு.

எனவே, G ஒரு குலமாகும்.

(v) மாற்று விதி (Commutative Law):

$$1.(-1) = (-1).1 = -1$$

$$i.(-1) = (-1).i = -i, \text{ முதலியன.}$$

எனவே, தொகுதி G-ல் மாற்று விதியும் பொருந்துகிறது. ஆகவே, தொகுதி G ஓர் அபெலியன் தொகுதியாகும். இத் தொகுதியிலுள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை 4. ஆதலின், G ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் தொகுதியாகும். இதன் வரிசை 4 என்பது தெளிவு.

7-10 குலங்களின் பொதுப்பண்புகள் (General properties of Groups)

G ஒரு தொகுதி அல்லது குலம் எனக்கொள்வோம். பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் $a \, O \, b$ ஐ $a \, b$ எனவும், a-ன் நேர்மாறு மூலகத்தை a^{-1} எனவும் குறிப்பிடுவோம். இவ்வாறே சர்வசம மூலகத்தை e என எழுதுவோம்

கூட்டல் இணைச்சேர்க்கையின் கீழ் $a \, O \, b$ஐ $a + b$ எனவும், a-ன் நேர்மாறு மூலகத்தை a^{-1} எனவும், சர்வசம மூலகத்தை 0 எனவும் எழுதுவோம்.

தேற்றம் 1:

இடது நீக்கல் விதி (Left Cancellation Law) a, b, c எனும் மூலகங்கள் Gஐச் சேர்ந்தவை எனின், $x \, y = x \, z \Longrightarrow y = z$.

நிரூபணம் :

$$xy = xz.$$

இரு பக்கமும் x^{-1} ஆல் முன் பெருக்குவதன் மூலம்.

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$$
$$(x^{-1}x)y = (x^{-1}x)z$$
$$ey = ez$$
$$\therefore\ y = z$$

தேற்றம் 2 :

இடது சர்வசம மூலகம் e வலது சர்வ சம மூலகமுமாகும்.

அதாவது $ex = x = xe \quad \forall\ x \in G.$

நிரூபணம் :

x எனும் மூலகத்தின் இடது நேர்மாறு மூலகம் x^{-1} எனவும், இடது சர்வசம மூலகம் e எனவும் கொள்வோம்.

$$x^{-1}(xe) = (x^{-1}x)e \quad \text{(சேர்ப்பு விதி)}$$
$$= ee = e \quad \text{(சர்வசம மூலகம்)}$$
$$= x^{-1}x$$

அதாவது $x^{-1}(xe) = x^{-1}x$

எனவே, முந்தைய தேற்றத்தின்படி

$$xe = x.$$

$\therefore$ e ஒரு வலது சர்வசம மூலகமாகும்.

தேற்றம் 3 :

x எனும் மூலகத்தின் இடது நேர்மாறு மூலகம் x^{-1} வலது நேர்மாறு மூலகமுமாகும்.

அதாவது $x^{-1}x = xx^{-1} = e.$

நிரூபணம் :

$$x^{-1}(xx^{-1}) = (x^{-1}x)x^{-1} \quad \text{(சேர்ப்பு விதி)}$$
$$= ex^{-1} \quad (\because x^{-1}x = e)$$
$$= x^{-1}e \quad \text{(தேற்றம் 2)}$$

அதாவது $x^{-1}(xx^{-1}) = x^{-1}e.$

எனவே தேற்றம் 1-ன் படி,

$$x\,x^{-1} = e$$

அதாவது x^{-1}, x-ன் வலது நேர்மாறு மூலகமுமாகும்.

தேற்றம் 4 :

வலர் நீக்கல் விதி (Right Cancellation Law)

$$y\,x = z\,x \Longrightarrow y = z \ \forall\ x, y, z \in G.$$

நிரூபணம் :

$$y\,x = z\,x$$

$$\therefore (y\,x)\,x^{-1} = (z\,x)\,x^{-1}$$

$$y\,(x\,x^{-1}) = z\,(x\,x^{-1}) \quad \text{(சேர்ப்பு விதி)}$$

$$y\,e = z\,e \quad \text{(வலது நேர்மாறு மூலகம்)}$$

$$\therefore\ y = z$$

எனவே $y\,x = z\,x \Longrightarrow y = z.$

தேற்றம் 5 :

$a, b \in G$ எனின், $a\,x = b$, $y\,a = b$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு குலம் G-ல் ஒரே முறைத் தீர்வு (Unique solution) உண்டு.

நிரூபணம் :

$ax = b$ என்ற சமன்பாட்டில் $x = a^{-1}b$ எனப் பிரதியிடின்,

$$a\,(a^{-1}\,b) = (a\,a^{-1})\,b$$
$$= e\,b$$
$$= b$$

எனவே, $ax = b$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு $a^{-1}\,b$. இனி இது ஒரே முறைத் தீர்வு என நிறுவுவோம்.

$x = a^{-1}\,b$ ஒரே முறைத் தீர்வு இல்லை எனின், $ax = b$ சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகள் x_1, x_2 எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ ax_1 = b$$
$$ax_2 = b$$

எனவே $a\,x_1 = a\,x_2$

$\therefore \quad x_1 = x_2$ (இடது நீக்கல் விதி)

ஆகவே, தீர்வு ஒரே முறைத் தீர்வாகும்.

இவ்வாறே $y\,a = b$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரே முறைத்தீர்வு $b\,a^{-1}$ என நிறுவலாம்.

தேற்றம் 6 :

ஒரு குலத்தில் ஒரே ஒரு சர்வசம மூலகம்தான் இருக்கும்.

நிரூபணம் :

முடியுமெனின் ஒரு குலத்தில் e_1, e_2 என்ற இரு சர்வசம மூலகங்கள் உள்ளன எனக் கொள்வோம்.

e_1 சர்வசம மூலகமெனின், $e_1\,e_2 = e_2$

e_2 சர்வசம மூலகமெனின், $e_2\,e_1 = e_1$

$\therefore \quad e_1 = e_2$

அதாவது ஒரு குலத்தில் ஒரு சர்வசம மூலகம்தான் உண்டு.

தேற்றம் 7 :

ஒரு குலத்தில் ஒரு மூலகத்திற்கு ஒரே ஒரு நேர்மாறு மூலகம் தான் இருக்கும்.

நிரூபணம் :

முடியுமெனின் ஒரு குலத்தில் a எனும் மூலகத்திற்கு b_1, b_2 என்ற இரு நேர்மாறு மூலகங்கள் உண்டெனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad a\,b_1 = e = b_1\,a$ ($\therefore$ b_1, a-ன் நேர்மாறு மூலகம்)

$a\,b_2 = e = b_2\,a$ ($\therefore$ b_2, a-ன் நேர்மாறு மூலகம்)

$\therefore \quad a\,b_1 = a\,b_2$

அதாவது $b_1 = b_2$ (இடது நீக்கல் விதி). எனவே, ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கு ஒரு நேர்மாறு மூலகம்தான் உண்டு.

தேற்றம் 8 :

ஒரு குலத்தில் a^{-1} எனும் மூலகத்தின் நேர்மாறு மூலகம் a ஆகும்.

அதாவது $(a^{-1})^{-1} = a$.

நிரூபணம் :

$a \in G$ எனின், $a^{-1} \in G$.

$\forall\ b \in G,\ b^{-1} b = e$ என நாம் அறிவோம்.

இதில் $b = a^{-1}$ எனப் பிரதியிடின்,

$$(a^{-1})^{-1} a^{-1} = e$$

$$\therefore\ [(a^{-1})^{-1} a^{-1}]\, a = e\, a$$

$$\Longrightarrow (a^{-1})^{-1} (a^{-1} a)$$

$$= a.$$

அதாவது, $(a^{-1})^{-1} e = a$

அதாவது, $(a^{-1})^{-1} = a$.

எனவே, a^{-1}-ன் நேர்மாறு மூலகம் a ஆகும்.

தேற்றம் 9 :

ஒரு குலத்தின் மூலங்கள் a, b எனின்,

$(a\, b)^{-1} a\, b = b^{-1} a^{-1}$.

நிரூபணம் :

$$(b^{-1} a^{-1})\, ab = b^{-1} (a^{-1} a)\, b$$

$$= b^{-1} e\, b$$

$$= b^{-1} b$$

$$= e$$

எனவே, $a\, b$-ன் நேர்மாறு மூலகம் $b^{-1} a^{-1}$.

தேற்றம் 10 :

(குலத்திற்குப் பிரிதொரு வரையறை)

$a, b \in G$ எனின், G எனும் கணம் $a\, x = b$, $y\, a = b$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு ஒரே முறைத் தீர்வுகள் G-ல் இருந்தால் மட்டும் சேர்ப்புப் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு தொகுதியாகும்.

நிரூபணம் :

$y\, a = a$ எனும் சமன்பாட்டின் ஒரே முறைத் தீர்வு e எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad e\,a = a.$

$c \in G$ எனின், $ax = c$ எனும் சமன்பாடு G-ல் ஒரே முறைத் தீர்வு கொண்டிருக்கும்.

$$e\,c = e(a\,x) = a\,x = c$$

எனவே, G-ல் e இடது சர்வ சம மூலகமாகும்.

எனவே, G-ல் e இடது சர்வசம மூலகமாகும். $y\,a = e$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரே முறைத் தீர்வு G-ல் a என்ற மூலகத்தின் நேர் மாறு மூலகமாகும்.

எனவே, G ஒரு குலமாகும்.

7-11. முடிவுள்ள கணங்களின் சேர்க்கை அட்டவணை

முடிவுள்ள கணங்களில் இணைச் சேர்க்கையைச் சேர்க்கை அட்டவணை மூலம் வெளிப்படுத்தலாம். ஒரு கணத்தில n மூலகங்களிலிருப்பின் அவற்றைக் கிடை வரிசையிலும், நிலைக்குத்து நிரலிலும் எழுதவேண்டும். $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ஒரு கணம் எனக் கொள்வோம். பின், வரிசைப்பட்ட சோடி $(a_i\, a_j)$ என்பது i ஆவது நிரையிலும், j ஆவது நிரலிலுமுள்ள மூலகமாம்.

மாதிரி 9 :

$(1, \omega, \omega^2)$ என்ற தொகுதியின் பெருக்கல் அட்டவணையை எழுதி. இத் தொகுதியில் பெருக்கல் ஓர் இணைச் சேர்க்கை என நிறுவுக.

.	1	ω	ω^3
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	$\omega^3 = 1$
ω^2	ω^2	$\omega^3 = 1$	$\omega^4 = \omega$

மேற் குறித்த அட்டவணையிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும், கொடுத்துள்ள கணத்தின் ஒரே முறை (unique) மூலகமாகும். எனவே, பெருக்கல் இத் தொகுதியில் ஓர் இணைச் சேர்க்கையாகும்.

மாதிரி 10 :

ஒன்றின் நான்கு நாற்படி மூலங்கள் கொண்ட கணத்தின் சேர்க்கை அட்டவணை தயாரித்து அக்கணம் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின்கீழ் ஒரு குலம் என நிறுவுக.

$$x = 1^{\frac{1}{4}}$$

$\therefore \quad x^4 = 1$

அதாவது $x^4 - 1 = 0$

$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$

$\therefore \quad x = \pm 1, x = \pm i$

$\therefore \quad x = 1, -1, i, -i$

$A = \{1, -1, i, -i\}$ எனக் கொள்வோம்.

A கணத்தின் சேர்க்கை அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

.	1	−1	i	$-i$
1	1	−1		$-i$
−1	−1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	−1	1
$-i$	$-i$	i	1	−1

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் A கணத்தின் மூலங்களாகும். எனவே, பெருக்கல் ஓர் இணைச்சேர்க்கையாகும்.

மேலும்,

$1.1 = 1 ; \quad 1.(-1) = -1 ; \quad 1.(i) = i ; \quad 1\ (-i) = -i$
எனவே, 1 சர்வசம மூலகம்.

மீண்டும் A கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு நேர்மாறு மூலகம் உண்டு. எடுத்துக்காட்டாக i என்ற மூலகத்தின் நேர்மாறு மூலகம் காண, i-ல் தொடங்கும் நிரையை எடுத்துக் கொள்வோம். இந் நிறையின் கடைசி மூலகம் 1 எனும் சர்வசம மூலகமாம். இந் நிரலின் தலைப்பிலுள்ள மூலகம் $-i$, i மூலகத்தின் நேர்மாறு மூலகமாகும். இவ்வாறே $1, -1, -i$ மூலகங்களின் நேர்மாறு மூலகங்கள் முறையே $1, -1, i$.

7-12. கூட்டல் மட்டு m (Addition Modulo m).

a, b என்பன இரு முழு எண்களெனின், $a \underset{m}{+} b$ என்று எழுதப்படும் கூட்டல் மட்டு m என்பது $a+b$ ஐ m ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கப் பெறும் மீதியாகிய மிகச்சிறிய எதிரெண்ணற்ற (non-negative) ஓர் எண்ணாகும்.

அதாவது a, b என்ற முழு எண்களைக் கூட்டிய பிறகு, அதிலிருந்து m-ன் முழு எண் மடங்குகளை நீக்கப்பெறும் mஐவிட குறைவான நேரெண் மீதி $a \underset{m}{+} b$-க்குச் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $5 \underset{7}{+} 15 = 20 = 7(2) + 6.$

அதாவது $20 \equiv 6$ (மட்டு 7)

(2) $7 \underset{6}{+} 5 = 12 = 6(2) + 0$

அதாவது $12 \equiv 0$ (மட்டு 6)

(3) $-40 + 5 = -35 = 6(-6) + 1$

அதாவது $-35 \equiv 1$ (மட்டு 6).

7-13. பெருக்கல் மட்டு m (Multiplication Mod m)

a, b என்பவை இரு முழு எண்களெனின், $a \underset{m}{\times} b$ என்று எழுதப்படும் பெருக்கல் மட்டு m என்பது, $a \times b$ பெருக்கம் m ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கப்பெறும் மிகச் சிறிய எதிரெண்ணற்ற (non-negative) மீதி r ஆகும்.

அதாவது $a \times b$ பெருக்கத்திலிருந்து m-ன் முழு எண் மடங்குகளை நீக்கப்பெறும் மீதி $a \underset{m}{\times} b$-க்குச் சமமாகும். இது m ஐ விடக் குறைவான நேரெண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. $2 \underset{3}{\times} 10 = 20 = 3(6) + 2 = 2$

2. $-4 \underset{5}{\times} 11 = -44 = 5(-9) + 1 = 1$

3. $-3 \underset{5}{\times} 11 = -33 = 5(-7) + 2 = 2.$

மாதிரி 11 :

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ எனும் கணம் கூட்டல் மட்டு 6-ன் கீழ் ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் குலம் என நிறுவுக.

சேர்க்கை அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	(0) $4 \circ 2$	1	2	3
5	5	0	1	(2) $5 \circ 3$	3	4

$4 \circ 2 = 4 \underset{6}{+} 2 = 6(1) + 0 = 2$ ... ... (1)

$5 \circ 3 = 5 \underset{6}{+} 3 = 6(1) + 2 = 2$ ... ... (2)

மூலகம் (1) 4-ல் தொடங்கும் நிரையும் 2-ல் தொடங்கும் நிரலும் வெட்டுமிடத்தில் உள்ளது. மூலகம் (2) 5-ல் தொடங்கும் நிரையும் 3-ல் தொடங்கும் நிரலும் வெட்டுமிடத்திலுள்ளது. இவ்விரு மூலகங்களும் அட்டவணையில் அடைப்புகளிலிடப்பட்டுள்ளது.

(1) மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து இரு மூலகங்களது கூட்டுத் தொகை கூட்டல் மட்டு 6-ன் கீழ் A கணத்தைச் சேர்ந்ததாகும். அட்டவணையிலுள்ள அனைத்து மூலகங்களிலும் A-ன் மூலகங்களாகும். எனவே கூட்டல் மட்டு 6 சேர்க்கை ஒரு இணைச் சேர்க்கையாகும்.

(2) a, b, c மூலகங்கள் A-ன் எவையேனும் மூன்று மூலகங்களெனின்,

$$a + (b + c), \quad (a + b) + c$$

ஆகிய இரண்டும் 6 ஆல் வகுக்கப்படும்போது ஒரே நேரெண் மீதியைக் கொடுக்கும். எனவே, A கணத்தில் சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

(3) A கணத்திலுள்ள 0 எனும் மூலகம் A கணத்தின் சர்வசம மூலகம். எனவே, A கணத்தில் சர்வசம மூலகம் உண்டு.

(4) அட்டவணையிலிருந்து 0, 1, 2, 3, 4, 5 மூலகங்களது நேர்மாறு மூலகங்கள் முறையே 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 என அறிகிறோம். எனவே A கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்துக்கும் நேர்மாறு மூலகங்கள் A-ல் உண்டு.

எனவே, கணம் A ஒரு குலமாகும்.

மேலும்,

(5) A கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும்

$$a \underset{m}{+} b = b \underset{m}{+} a$$

எடுத்துக் காட்டாக,

$$4 \underset{6}{+} 3 = 7 = 6(1) + 1 = 1$$

$$3 \underset{6}{+} 4 = 7 = 6(1) + 1 = 1.$$

எனவே மாற்று விதியும் A குலத்தில் பொருந்தும்.

மீண்டும் A குலத்திலுள்ள மூலகங்கள் முடிவுள்ளவை யாதலின், A குலம் ஒரு முடிவுள்சி அபெலியின் தொகுதியாகும்.

குறிப்பு :

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ கணத்திலிருந்து 0 ஐ நீக்கின் A கணம் கூட்டல் மட்டுல் 6-ன் கீழ் ஒரு குலமாகாது. ஏனெனில், A-ல் சர்வ சம மூலகம் இராது.

மாதிரி 12 :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ எனும் கணம் பெருக்கல் மட்டு 5-ன் கீழ் ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் குலம் என நிறுவுக.

சேர்க்கை அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$\times_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	(1) $2 \circ 3$	3
3	3	1	4	2
4	4	(3) $4 \circ 2$	2	1

$$2 \circ 3 = 2 \underset{5}{\times} 2 = 6 = 5(1) + 1 = 1$$

$$4 \circ 2 = 4 \underset{5}{\times} 3 = 8 = 5(1) + 3 = 3.$$

இவ்விரு மூலகங்களும் அட்டவணையில் அடைப்புகளிலிடப் பட்டுள்ளன.

(1) **இணைச் சேர்க்கை :**

A கணத்திலுள்ள அனைத்து மூலகங்களுக்கும் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$2 \circ 4 = 2 \times_5 4 = 8 = 5(1) + 3 = 3 \in A$$

$$3 \circ 2 = 3 \times_5 2 = 6 = 5(1) + 1 = 1 \in A$$

$$3 \circ 3 = 3 \times_5 3 = 9 = 5(1) + 4 = 4 \in A$$

$$3 \circ 4 = 3 \times_5 4 = 12 = 5(2) + 2 = 2 \in A$$

$$4 \circ 4 = 4 \times_5 4 = 16 = 5(3) + 1 = 1 \in A$$

(2) சேர்ப்பு விதி :

$(a \circ b) \circ c$, $a \circ (b \circ c)$ ஆகிய இரண்டும் ஒரே எண்ணை மீதியாகக் கொண்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$(2 \circ 3) \circ 4 = 1 \circ 4 = 4$$

$$2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 2 = 4$$

எனவே சேர்ப்புவிதி பொருந்தும்.

(3) சர்வ சம மூலகம் :

A கணத்தில் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் சர்வசம மூலகம் 1 ஆகும்.

(4) நேர்மாறு மூலகம் :

அட்டவணையிலிருந்து A கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரு நேர்மாறு மூலகம் உண்டு என்பது தெளிவாகிறது. 1, 2, 3, 4 மூலகங்களது நேர்மாறு மூலகங்கள் முறையே 1, 3, 2, 4.

(5) மாற்றுவிதி :

$$a \circ b + b \circ a \ \forall \ a, b \in A.$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$3 \circ 4 = 3 \times_5 4 = 12 = 5(2) + 2 = 2.$$

$$4 \circ 3 = 4 \times_5 3 = 12 = 5(2) + 2 = 2.$$

எனவே மாற்று விதி பொருந்தும்.

A கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் முடிவுள்ளவையாதலின், A கணம் ஒரு முடிவுள்ள அபெலியன் குலமாகும்.

தேற்றம் :

எச்ச இனம் மட்டு m (Residue Classes Modulo m) கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு முடிவுள்ள குலமாகும்.

நிரூபணம் :

எச்ச இனம் மட்டு m, G எனக் கொள்க.

அதாவது $G = \{ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{s_1\} \ldots \{s_2\} \ldots, \{m-1\} \}$

1. இணைச்சேர்க்கை

$\{s_1\} + \{s_2\} = s$ எனக் கொள்வோம். இங்கு s என்பது $(s_1 + s_2)$ஐ m ஆல் வகுக்கப்பெறும் மிகச் சிறிய நேர் எண் மீதியாகும்.

$$\therefore \quad 0 \leqslant s < m$$

எனவே $\{s\} \in G$.

2. சேர்ப்பு விதி :

$$(a + b) + c = a + (b + c) \; \forall \; a, b, c \in G.$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\{ \{2\} + \{3\} \} + \{4\} = \{5\} + \{4\} = \{9\}$$

$$\{2\} + \{ \{3\} + \{4\} \} = \{3\} + \{7\} = \{9\}, m>9$$

எனவே சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

(3) சர்வசமமூலகம் :

சர்வ சம மூலகம் $\{0\}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \{0\} + \{s\} = \{s\}$$

(4) நேர் மாறு மூலகம் :

$$\{m-s\} + \{s\} = \{m\} = \{0\}$$

எனவே $\{s\}$ -ன் நேர்மாறு மூலகம் கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் $\{m-s\}$ ஆகும்.

ஆகவே, கணம் G ஒரு முடிவுள்ள மூலமாகும்.

மாதிரி 13 :

எச்ச இனம் மட்டு 7 (Residue Classes Modulo 7) கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலம் என நிறுவுக.

எச்ச இனம் மட்டு 7

$$G = \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

என்க.

(1) இணைச் சேர்க்கை :

கூட்டல் இணைச் சேர்க்கைப் பண்பு பொருந்தும்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$\{4\} + \{5\} = \{9\} = 7(1) + 2 = \{2\} \in G.$$

(2) சேர்ப்பு விதி :

எச்ச இனம் மட்டு 7-ல் சேர்ப்பு விதி பொருந்துகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\{1\} + [\{2\} + \{6\}] = \{2\} \text{ (மட்டு 7) } \in G$$

$$[\{1\} + \{2\}] + \{6\} = \{2\} \text{ (மட்டு 7) } \in G$$

(3) சர்வ சம மூலகம் :

$\{0\}$ ஆகும்.

(4) நேர்மாறு மூலகம் :

G கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரு நேர் மாறு மூலகம் உண்டு.

$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\},$$

மூலகங்களது நேர்மாறு மூலகங்கள் முறையே,

$$\{0\}, \{6\}, \{5\}, \{4\}, \{3\}, \{2\}, \{1\}.$$

எனவே G ஒரு குலமாகும்.

பயிற்சி 7·1

(1) கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ்

$$G = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

ஒரு குலம் என நிறுவுக.

(2) ஒன்றின் ஐந்து படி மூலங்கள் (Fifth roots of unity) பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலம் என நிறுவுக.

(3) அனைத்து வெக்டர்களது கணம் வெக்டர் பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குலமல்ல என நிறுவுக.

(4) n வரிசையுடைய மெய்யான மூலகங்களைக் கொண்ட அனைத்து பூச்சியமில் அணிகளது கணம் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலம் என நிறுவுக

(5) θ-ன் மெய்யான மதிப்புகளுக்கு

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

என்ற அணிகளது கணம் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலம் என நிறுவுக.

(6) $\{1, -1, i, -i\}$ என்ற குலத்தின் சேர்ப்பு அட்டவணையைத் தயாரித்து, இக் குலத்தின் இணைச் சேர்க்கை பெருக்கல் என நிறுவுக.

(7) 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற எண்கள் பெருக்கல் மட்டு 7-ன் கீழ் ஒரு குலம் என நிறுவுக.

(8) n ஒரு பகாவெண்ணாக இருந்தால் மட்டுமே $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ என்ற கணம் பெருக்கல் மட்டு n-ன் கீழ் ஒரு குலமாகும் என நிறுவுக.

(9) $\{1, 2, 3\}$ எனும் கணம் பெருக்கல் மட்டு 4-ன் கீழ் ஒரு குலமாகாது என நிறுவுக.

(10) இடது, வலது நீக்கல் விதிகள் முடிவுள்ள கணம் A-ல் பொருந்துமெனின், சேர்ப்பு இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் A ஒரு குலமென நிறுவுக.

7-14. வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations)

$\{3, 4, 5\}$ என்ற கணத்தின் மூன்று எண்களையும் $3! = 6$ வெவ்வேறு வழிகளில் வரிசைப்படுத்தலாம்.

அவை 3, 4, 5 ; 3, 5, 4; 4, 3, 5; 4, 5, 3; 5, 3, 4; 5, 4, 3.

அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று எண்களுக்கும் $3!$ வரிசைமாற்றங்கள் உள்ளன. அவை $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ என எழுதப்படும்.

ஒரு வரிசை மாற்றத்தை இரு நிரை குறியீட்டின் மூலம் வெளிப்படுத்தலாம். முதல் நிரையில் எண்களை இயற்கையான வரிசையிலும், இரண்டாவது நிரையில் அவை வரிசைப்படுத்தப் பட்ட வரிசையிலும் எழுதலாம்.

அதாவது $P_1 = \begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}$; $3 \to 3, \quad 4 \to 4, \quad 5 \to 5.$

இங்கு இரு நிரைகளிலும் ஒரு வித மாற்றமும் இல்லை. இவ்வகை வரிசை மாற்றம் சர்வசம வரிசை மாற்றம் (Identity Permutation) எனப்படும். இதை I எனக் குறியீடு செய்வது மரபு.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ 3, & 5, & 4 \end{pmatrix}; \quad 3 \to 3, \quad 4 \to 5, \quad 5 \to 4.$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 3, & 4 & 5 \\ 5, & 4, & 3 \end{pmatrix}; \quad 3 \to 5, \quad 4 \to 4, \quad 5 \to 3.$$

முதலியன.

P_3 வரிசை மாற்றத்தை பின்வருமாறும் எழுதக் கூடும்.

$$P_3 = \begin{pmatrix} 5, & 4, & 3 \\ 3, & 4, & 5 \end{pmatrix}; \quad 5 \to 3, \quad 4 \to 4, \quad 3 \to 5.$$

P_3 வரிசை மாற்றத்தின் இரு வேறு வடிவங்கள் வெவ்வேறு வரிசை மாற்றத்தைத் தரவில்லை.

எனவே, ஒரு நிரலில் மேலும் கீழும் உள்ள மூலகங்கள் மாறாத வரை, குறியீட்டில் நிரல்களது வரிசை ஒரு பொருட்டல்ல என்பது தெளிவாகிறது.

m மாணவர்களையும் m நாற்காலிகளையும் எடுத்துக் கொள்வோம். m மாணவர்களும் m நாற்காலிகளில் $m!$ வெவ்வேறு வழிகளில் அமரலாம். மாணவர்களுக்கும் நாற்காலிகளுக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான ஒத்தியைபு (one-to-one Correspondence) உள்ளது. இது ஒரு மேல் உருமாற்றமாகும் (onto mapping).

மாணவர்களது பட்டியல் எண்கள் $1, 2, 3, \ldots m$ எனவும், நாற்காலிகளது வரிசை எண்கள் $1, 2, 3 \ldots m$ எனவும் கொள்வோம்.

மாணவர்களை நாற்காலிகளிலமர்த்தும் ஒரு முறை

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, \ldots, m \\ 1, 2, 3, \ldots, m \end{pmatrix}$$

அதாவது $1 \to 1, \quad 2 \to 2, \quad 3 \to 3, \quad \ldots, \quad m \to m.$

இது சர்வசம வரிசைமாற்ற (Identity permutation) மாகும். மற்ற வரிசை மாற்றங்கள் பின்வருவதுபோல் இருக்கும்.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, \ldots, m \\ 1, 3, m, \ldots, 2 \end{pmatrix}$$

அதாவது $1 \to 1, \quad 2 \to 3, \quad 3 \to m, \quad \ldots, \quad m \to 2.$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, \ldots, m \\ m, 3, 1, \ldots, 4 \end{pmatrix}$$

அதாவது $1 \to m, \quad 2 \to 3, \quad 3 \to 1, \quad \ldots, \quad m \to 4.$

முதலியன.

இங்கு முதல் நிரையின் வரிசை முக்கியமல்ல. மேலும், கீழுள்ள ஒத்த உறுப்புகள் மாறுதிருக்க வேண்டும்.

7-15. வரையறை

ஒரு முடிவுள்ள கணத்தை அதன் மீதே மாற்றும் ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம் வரிசை மாற்றம் (Permutation) எனப்படும். இவ்வாறே, வரிசைமாற்றம் P_1-ல், $3 \to 5$ வரிசைமாற்றம் P_2-ல் $5 \to 2$ எனவே வரிசைமாற்றம் $P_1 \circ P_2$-ல் $3 \to 2$.

இணைச் சேர்க்கை

மேலும் P_1, P_2 என்பவை வரிசை மாற்றங்களெனின், $P_1 \circ P_2$-ம் ஒரு வரிசை மாற்றமாகும். எனவே, வரிசை மாற்றங்களது கணத்தில், வரிசை மாற்றங்களது பெருக்கம் ஓர் இணைச் சேர்க்கையாகும்.

சேர்ப்பு விதி :

$$(P_1 \circ P_2) \circ P_3 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 5, & 4, & 2, & 1, & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 4, & 5, & 3, & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 5, & 4, & 2, & 1, & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5, & 4, & 2, & 1, & 3 \\ 1, & 3, & 4, & 2, & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 3, & 4, & 2, & 5 \end{pmatrix}$$

$$(P_2 \circ P_3) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 3, & 5, & 4, & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 4, & 5, & 3, & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 3, & 5, & 4, & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, & 3, & 5, & 4, & 2 \\ 2, & 5, & 1, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 5, & 1, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ P_1 \circ (P_2 \circ P_3) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 5, & 1, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \\ 1, & 3, & 4, & 2, & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 3, & 4, & 2, & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ (P_1 \circ P_2) \circ P_3 = P_1 \circ (P_2 \circ P_3)$$

எனவே, வரிசை மாற்றங்களது கணத்தில் பெருக்கல் சேர்க்கைகளுக்குச் சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

$$f(a) = d,\ f(b) = c,\ f(c) = b,\ f(d) = a$$

என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள கணத்தின் வரிசை மாற்றம் f எனின்,

$$f = \begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ d, & c, & b, & a \end{pmatrix}$$

முடிவுள்ள கணத்திலுள்ள மூலகங்களது எண்ணிக்கை வரிசை மாற்றத்தின் வரிசை (Order) எனப்படும்.

7-16. இரு வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கம் (Product of two Permutations)

$$G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

என்ற கணத்தின் மூன்று வரிசை மாற்றங்கள்

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 3, & 5, & 4, & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 4, & 5, & 3, & 1 \end{pmatrix}$$

எனக் கொள்வோம்.

பின்,

$$P_1 \circ P_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 3, & 5, & 4, & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \\ 5, & 4, & 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 5, & 4, & 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}.$$

(இங்கு முதல் வரிசை மாற்றத்தின் இரண்டாவது நிரையும், இரண்டாவது வரிசை மாற்றத்தின் முதல் நிரையும் நீக்கப்பெறுகிறது.)

வரிசை மாற்றம் P_1-ல், $1 \to 3$

வரிசை மாற்றம் P_2-ல், $3 \to 5$

எனவே வரிசை மாற்றம் $P_1 \circ P_2$-ல் $1 \to 5$.

7·17. சர்வசம வரிசை மாற்றம் (Identity Permutation)

$$I=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix} \text{ அதாவது } f: G\to G.$$

என்பது சர்வசம வரிசை மாற்றம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$P_1 \circ I=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3, & 4, & 5, & 1, & 2\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix}=P_1$$

$$I \circ P_1=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix}=P_1$$

$$\therefore\ P_1 \circ I=P_1=I \circ P_1.$$

7·18. நேர்மாறு வரிசை மாற்றம் (Inverse Permutation)

வரிசை மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்றான மேல் உருமாற்றமாதலின், ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றத்திற்கும் நேர்மாறு வரிசைமாற்றம் உண்டு. P_i என்ற வரிசை மாற்றத்தின் நேர்மாறு வரிசைமாற்றம் P_i^{-1}. P_i வரிசை மாற்றத்தின் நிரைகளை மாற்றுவதன் மூலம் P_i^{-1} கிடைக்கப்பெறும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$P_1=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix} \text{ எனின்,}$$

$$P_1^{-1}=\begin{pmatrix}3, & 4, & 5, & 1, & 2\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}.$$

மேலும், $P_1 \circ P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3, & 4, & 5, & 1, & 2\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}=I$$

7-19. மாற்று விதி (Commutative Law)

இரு வரிசை மாற்றங்களது பெருக்கத்திற்கு மாற்றுவிதி பொதுவாகப் பொருந்தாது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$P_1 \circ P_2 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 4, 5, 1, 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1, 3, 5, 4, 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 4 \\ 3, 4, 5, 1, 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3, 4, 5, 1, 2 \\ 5, 4, 2, 1, 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5, 4, 2, 1, 3 \end{pmatrix}$$

$$P_2 \circ P_1 = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1, 3, 5, 4, 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 4, 5, 1, 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 1, 3, 5, 4, 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, 3, 5, 4, 2 \\ 3, 5, 2, 1, 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 3, 5, 2, 1, 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad P_1 \circ P_2 \neq P_2 \circ P_1.$$

மாதிரி 14 :

$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 3, 4, 2 \end{pmatrix}$ என்ற வரிசை மாற்றத்தின் நேர்மாறு வரிசை மாற்றம் காண்க.

$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 3, 4, 2 \end{pmatrix}$-ன் நேர்மாறு $\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ a, b, c, d \end{pmatrix}$ என்க.

$$\therefore \begin{pmatrix} 1, 2, 3. 4 \\ 1, 3, 4, 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ a, b, c, d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 3, 4, 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, 3, 4, 2 \\ a, c, d, b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix} \quad (\because AA^{-1} = I).$$

$$\therefore \quad a = 1, \quad c = 2, \quad d = 3, \quad b = 4.$$

எனவே நேர்மாறு வரிசைமாற்றம்

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4\\ a, & b, & c, & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4\\ 1, & 4, & 2, & 3\end{pmatrix}$$

7-20. வட்ட வரிசை மாற்றம் (Cyclic Permutation)

$$\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & a_3, & \ldots & a_n\\ a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_n\end{pmatrix}$$

என்றிருக்கும் வரிசை மாற்றம் வட்ட வரிசை மாற்றம் எனப்படும். இதன்படி n ஆகும். அதாவது, வரிசை மாற்றம் ஒன்றில் முதல் நிரையிலுள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் அதற்கடுத்து வரும் மூலகங்களாலும், கடைசி மூலகம் முதல் மூலகத்தாலும் மாற்றி எழுதப் பெறின், அவ்வகை வரிசை மாற்றம் 'வட்ட வரிசை மாற்றம்' எனப்படும்.

இது $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ என எழுதப் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 2, & 3, & 4, & 5, & 1\end{pmatrix}$$

ஒரு வட்ட வரிசை மாற்றமாகும். இது $(1, 2, 3, 4, 5)$ என எழுதப்படும். இவை $(2, 3, 4, 5, 1)$ அல்லது $(3, 4, 5, 1, 2)$ என்றும் எழுதலாம்.

எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட வட்ட வரிசை மாற்றம் பல ஒரு நிரை குறியீடுகளால் எழுதப்படக் கூடும்.

7-21. வட்ட வரிசை மாற்றம் வடிவில் ஒரு வரிசை மாற்றத்தைக் குறிப்பிடுதல்

$$a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$$ (என்க).

$$=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$$ (2 ஆவது 3 ஆவது நிரல்களை மாற்றுவதன் மூலம்)

$$=(1\ \ 3\ \ 2)$$

அதாவது, $a=(1\ \ 3\ \ 2)$

$$\text{மீண்டும்},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 2\ 3)\ (4\ 5)$$

இங்கு b எனும் வரிசை மாற்றம் ஒன்றுக்கொன்று இணையாத இரு வட்டவரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கமாகும்.

7-22. நீளம் (Length)

ஒரு வட்ட வரிசை மாற்றத்தில் வரிசைப் படுத்தப்பட்ட பொருள்களின் எண் அதன் நீளம் எனப்படும்.

மாதிரி 15 :

நிறுவுக : $(1, 2, 3)(4, 5) = (1, 2, 3) \circ (4, 5)$

$$(1, 2, 3)\ (4, 5) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 5, & 4 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, 0) \circ (4, 5) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 4, & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 2, & 3, & 5, & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 4, & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 5, & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 5, & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ (1, 2, 3)(4, 5) = (1, 2, 3) \circ (4, 5).$$

மாதிரி 16 :

பின்வருபனவற்றை 5 குறியீடுகளுக்கு நிறுவுக.

$$(1, 4, 3, 2) = (1, 2, 3) \circ (3, 1, 2, 4)$$

$$(1, 4, 3, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(1, 2, 3) \circ (3, 1, 2, 4) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 4, & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3, & 1, & 2, & 4, & 5 \\ 1, & 2, & 4, & 3, & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 1, & 4, & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2, & 3, & 1, & 4, & 5 \\ 4, & 1, & 2, & 3, & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 4, & 1, & 2, & 3, & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1, & 4, & 3, & 2, & 5\\ 4, & 3, & 2, & 1, & 5\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (1, 2, 3) \circ (3, 1, 2, 4) = (1, 4, 3, 2)$$

7-23. வட்ட வரிசை மாற்றத்தின் அடுக்கு (Power of Cyclic Permutation)

$A = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ஒரு வட்ட வரிசை மாற்றம் எனக் கொள்வோம்.

$$A^2 = A_0\, A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

அதாவது $1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 5, 4 \to 1, 5 \to 2.$

$$A_3 = A_0\, A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

அதாவது $1 \to 4, 2 \to 5, 3 \to 1, 4 \to 2, 5 \to 3.$

எனவே $A = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ எனின்,

$A^2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$

$A^3 = (1\ 4\ 5\ 2\ 3)$

இவ்வாறே $A^4 = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$

$$A^5 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} = I$$

எனவே A^5 ஒரு சர்வசம வரிசை மாற்றம்.

மேலும், $A^6 = A^5 \circ A = I \circ A = A$

$A^7 = A^5 \circ A^2 = I \circ A^2 = A^2$

$A^8 = A^5 \circ A^3 = I \circ A^3 = A^3$

$A^9 = A^5 \circ A^4 = I \circ A^4 = A^4$

$A^{10} = A^5 \circ A^5 = I \circ I = I$, முதலியன.

மாதிரி 17 :

$A = (1\ 2\ 3\ 4)$ ஒரு வட்ட வரிசை மாற்றமெனின், A-ன் முழு எண் அடுக்குகளைக் காண்க. $G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$ எனும் கணம் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு வட்டத் தொகுதி என நிறுவுக.

$$A = (1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \circ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \circ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I$$

$$\therefore \quad A^5 = A^4 \circ A = I \circ A = A \in G$$
$$A^6 = A^4 \circ A^2 = I \circ A^2 = A^2 \in G$$
$$A^7 = A^4 \circ A^3 = I \circ A^3 = A^3 \in G$$
$$A^8 = A^4 \circ A^4 = I \circ I = I \in G$$
$$A^{12} = A^8 \circ A^4 = I \circ I = I \in G$$

அதாவது G எனும் கணத்தில் சர்வசம மூலகம் உண்டு. $A^4 = I$. மேலும் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை பொருந்தும். எனவே, பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் G ஒரு வட்டத் தொகுதியாகும்.

7-24. ஒரு மூலகத்தின் முழு எண் அடுக்குகள் (Intergral Powers of an Element)

சாதாரண பெருக்கலை இணைச் சேர்க்கையாகக் கொண்ட G எனும் குலத்தில் a ஒரு மூலகம் எனக் கொள்வோம்.

பின், சேர்ப்பு விதியின்படி,

$a \circ a \circ a \ldots n$ காரணிகள் $= a^n$.

e சர்வசம மூலகமெனின், $a^0 = e$ என வரையறுப்போம்.

n ஒரு குறை முழு எண் என்க.

$\therefore \quad n = -m$ (m கூட்டு முழு எண்) என்போம்.

$a^n = a^{-m} = (a^m)^{-1}$ என வரையறுப்போம்.

$\therefore \quad a^{-m} = (a^m)^{-1}$

$= (a \circ a \circ a \ldots m$ காரணிகள்$)^{-1}$

$= a^{-1} \circ a^{-1} \circ a^{-1} \ldots m$ காரணிகள்.

$= (a^{-1})^m$.

எனவே, பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைக்கு

1. $a \circ a \circ a \ldots n$ காரணிகள் $= a^n$
2. $a^0 = e$
3. $a^{-m} = (a^{-1})^m$.

7-25. மூலகத்தின் வரிசை (Order of an Element)

G எனும் ஒரு குலத்தின் மூலகம் a எனக்கொள்வோம். e சர்வ சம மூலகமெனின், $a^n = e$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் மிகச் சிறிய நேர்முழு எண் n, மூலகம் a-ன் வரிசை என வரையறுக்கப்படும். மேற்கூறிய கட்டுப்பாட்டில் மிகச்சிறிய நேர் முழு எண் இல்லை எனின், a-ன் வரிசை பூச்சியம் எனப்படும்.

7-26. சர்வசம மூலகத்தின் வரிசை (Order of the Identity Element)

ஒரு குலத்தில் சர்வசம மூலகம் e-ன் வரிசை 1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழுள்ள $\{1, \omega, \omega^2\}$ என்ற குலத்தின் சர்வசம மூலகமான 1-ன் வரிசை 1 ஆகும்.

$$(\omega)^3 = 1$$

$$(\omega^2)^3 = \omega^6 = 1.$$

எனவே, ω, ω^2 மூலகங்களது வரிசை முறையே 3, 3 ஆகும்.

மாதிரி 18 :

$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற குலத்திலுள்ள மூலகங்களது வரிசை காண்க. (இது கூட்டல் மட்டு 6-ன் கீழ் ஒரு குலமாகும்).

கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் $na = e$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலுள்ள மிகச் சிறிய நேர் முழு எண், மூலகம் a-ன் வரிசை எனப்படும்.

குலம் G-ல் சர்வசம மூலகம் 0. இதன் வரிசை 1 ஆகும்.

$$6(1) = 6 = 0$$

$$3(2) = 6 = 0$$

$$2(3) = 6 = 0$$

$$3(4) = 12 = 0$$

$$6(5) = 30 = 0.$$

எனவே 0, 1, 2, 3, 4, 5 மூலகங்களது வரிசைகள் முறையே 1, 6, 3, 2, 3, 6.

7-27. தேற்றம் 1

ஒரு முடிவுள்ள குலத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தினது வரிசையும் முடிவுள்ளதாகும்.

நிரூபணம் :

G எனும் ஒரு முடிவுள்ள குலத்தின் யாதேனும் ஒரு மூலகம் a எனக் கொள்வோம். $a, a^2, a^3, \ldots$ என்ற a-ன் நேர் முழு எண் அடுக்குகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அடுக்குகள் ஒவ்வொன்றும் குலம் G-ன் மூலகங்கள். G ஒரு முடிவுள்ள குலமானதால், a-ன் அனைத்து நேர் முழு எண் அடுக்குகளும் வெவ்வேறானவையாக இருக்கமுடியாது.

எனவே, $a^r = a^s, r > s$ என்க.

$$a^r = a^s, r - s > 0$$

$$\Longrightarrow a^r . a^{-s} = a^s . a^{-s}$$

$$\Longrightarrow a^{r-s} = a^0 = e.$$

அதாவது $a^{r-s} = e$

$r - s = p$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a^p = e.$$

எனவே, $a^p = e$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் p என்ற ஒரு நேர் முழு எண் உண்டு.

இவ்வாறே, $a^{r_1} = a^{s_1}$, $r_1 > s_1$ எனின், p என்ற மற்றுமொரு நேர் முழு எண் $a^{p_1} = e$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருக்கும்.

இப்பொழுது $p_1, p_2, p_3 \ldots$ என்ற நேர் முழு எண்களிலொன்று மிகச் சிறியதாயிருக்கும். அதை n என்க $\therefore a^n = e$.

அதாவது $a^n = e$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் n எனும் மிகச் சிறிய நேர் முழு எண் ஒன்று உண்டு. எனவே, ஒரு முடிவுள்ள கணத்தின் ஒவ்வொரு மூலகத்தின் வரிசையும் முடிவுள்ளதே யாகும்.

7-28. தேற்றம் 2

ஒரு குலத்திலுள்ள a என்ற யாதேனும் ஒரு மூலகத்தின் அடுக்கின் வரிசை, a-ன் வரிசையை விடப் பெரியதாக இருக்க முடியாது.

நிரூபணம் :

G எனும் குலத்தில் a யாதேனும் ஒரு மூலகம் எனக் கொள் வோம். அதன் முழு எண் அடுக்குகளில் யாதேனும் ஒன்று a^r என்க.

a, a^r மூலகங்களது வரிசைகள் முறையே m_1, m_2 எனின்,

$$a^{m_1} = e, \ (a^r)^{m_2} = e.$$

$$(a^r)^{m_1} = \left(a^{m_1}\right)^r = e^r = e.$$

$$(a^r)^{m_2} = e$$

வரையறையின்படி m_1, m_2 இரண்டும் மேற்கண்ட தொடர்புகளில் பொருந்தும் மிகச் சிறிய நேர் முழு எண்களாகும்.

$$\therefore \quad m_1 \geqslant m_2 \text{ அல்லது } m_2 \leqslant m_1$$

எனவே, a^r-ன் வரிசை a-ன் வரிசையை விடப் பெரியதாக இருக்க முடியாது.

7-29. தேற்றம் 3

ஒரு குலத்தில் யாதேனும் ஒரு மூலகத்தின் வரிசையும் அதன் நேர்மாறு மூலகத்தின் வரிசையும் அதே எண்ணாகும்.

நிரூபணம் :

G எனும் குலத்தில் யாதேனும் ஒரு மூலகம் a எனவும், அதன் நேர்மாறு மூலகம் a^{-1} எனவும் கொள்வோம்.

a, a^{-1} மூலகங்களது வரிசைகள் முறையே m_1, m_2 என்க. a-ன் அடுக்கு a^{-1} ஆதலின், a^{-1}-ன் வரிசை a-ன் வரிசையை விடப் பெரியதாய் இருக்க முடியாது.

$$\therefore \quad m_2 \leqslant m_1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

மேலும், $(a^{-1})^{m_2} = e$

$$\Longrightarrow \quad a^{-m_2} = e$$

$$\Longrightarrow \quad a^{-m_2} \cdot a = e \cdot a$$

$$\Longrightarrow a^{-(m_2 - 1)} = a$$

$$\Longrightarrow (a^{-1})^{m_2 - 1} = a$$

a-ன் வரிசை m_1 ஆதலின், a-ன் வரிசை a^{-1}ன் வரிசையைவிடப் பெரியதாக இருக்கமுடியாது.

$$\therefore \quad m_1 \leqslant m_2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

எனவே (1), (2)-லிருந்து

$$m_1 = m_2.$$

7-30. தேற்றம் 4

ஒரு குலத்தில் a, b என்பவை எவையேனும் இரு மூலகங்களெனின், $a, b^{-1}a\ b$ என்ற மூலகங்களது வரிசைகள் சமமாகும்.

நிருபணம் :

a மூலகத்தின் வரிசை m எனின், $a^m = e$.

$$(b^{-1}\ a\ b)^2 = (b^{-1}\ a\ b)\ (b^{-1}\ a\ b)$$
$$= b^{-1}a\,(b\,b^{-1})\ a\ b$$
$$= b^{-1}a\ e\ a\ b = b^{-1}\ a^2\ b$$

இவ்வாறே, $(b^{-1}\ a\ b)^3 = b^{-1}\ a^3\ b$

$$\therefore\ (b^{-1}\ a\ b)^m = b^{-1}\ a^m\ b$$
$$= b^{-1}\ e\ b$$
$$= b^{-1}\ b = e.$$

எனவே, m மிகச்சிறிய நேர்முழு எண் எனின், $b^{-1}\ a\ b$-ன் வரிசை m ஆகும்.

mஐவிடச் சிறிய நேர் முழு எண் n எனின், $(b^{-1}\ a\ b)^n = b^{-1}\ a^n\ b \neq e$. $(\because\ a^n \neq e)$. எனவே, m மிகச் சிறிய நேர் முழு எண்ணாகும். எனவே, $b^{-1}\ a\,b$-ன் வரிசையும் m ஆகும். அதாவது a-ன் வரிசையும், $b^{-1}\ a\ b$-ன் வரிசையும் ஒரே எண்ணாகும்.

மாதிரி 19 :

G எனும் ஒரு குலத்தில், $b^{-1}\ a^{-1}\ b\,a = e \quad \forall\ a, b \in G$ எனின், G ஓர் அபெலியன் குலமாகும்.

$$b^{-1} a^{-1} b a = e \Longrightarrow (b^{-1} a^{-1})(b a) = e$$

$$\Longrightarrow (b^{-1} a^{-1})^{-1} = b a$$

$$\Longrightarrow (a^{-1})^{-1} (b^{-1})^{-1} = b a$$

$$\Longrightarrow a b = b a$$

மாற்றுவிதி பொருந்துவதனால், G ஓர் அபெலியன் குலமாகும்.

மாதிரி 20 :

G குலத்தில் a, b என்ற எவையேனும் இரு மூலகங்களுக்கு $(a b)^m = a^m b^m$ என்பது அடுத்தடுத்த மூன்று முழு எண்களுக்குப் பொருந்துமெனின், G ஓர் அபெலியன் குலம் என நிறுவுக.

அடுத்தடுத்த மூன்று முழு எண்கள் $r, r+1, r+2$ என்க.

$$\therefore \quad (a b)^r = a^r b^r$$

$$(a b)^{r+1} = a^{r+1} b^{r+1}$$

$$(a b)^{r+2} = a^{r+2} b^{r+2}$$

$$\therefore \quad (a b)^{r+2} = (a b)^{r+1} (a b)$$

$$\Longrightarrow a^{r+2} b^{r+2} = (a^{r+1} b^{r+1}) ab$$

$$\Longrightarrow a^{r+1} a b^{r+1} b = (a^{r+1} b^{r+1} (a b)$$

$$\Longrightarrow ab^{r+1} = b^{r+1} a$$

$$\Longrightarrow a^r (a b^{r+1}) = a^r (b^{r+1} a)$$

$$\Longrightarrow a^{r+1} b^{r+1} = a^r b^r b a$$

$$\Longrightarrow (ab)^{r+1} = a^r b^r (b a)$$

$$\Longrightarrow (a b)^r (a b) = (a b)^r (b a)$$

$$\Longrightarrow a b = b a.$$

எனவே G ஓர் அபெலியன் குலம்.

7·31. குலங்களின் ஐசோமார்பிசம் (Isomorphism of Groups)

வரையறை :

O என்ற இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் G ஒருகுலம் எனவும், O_1 என்ற இணைச் சேர்க்கையின் G_1 பிறிதொரு குலம் எனவும் கொள்வோம். G-லுள்ள a, b என்ற மூலகங்களது f விம்பங்கள்

$f(a)$, $f(b)$ என்க. $f: G \to G_1$ என்ற ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றம்

$$f(a \, 0 \, b) = f(a) \, 0_1 \, f(b)$$

என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருப்பின், இவ்வகை உருமாற்றம் ஐசோமார்பிசம் (Isomorphism) எனப்படும். மேலும், இவ்வகை உருமாற்றம் மேல் உருமாற்றம் எனின், $G \simeq G_1$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

அதாவது 0, 0_1 என்ற இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் முறையே

$$G = \{ a, b, c \ldots \}$$

$$G_1 = \{ a_1, b_1 \, c_1, \ldots \}$$

என்க.

G_1 குலத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் G குலத்தில் உள்ள ஒரு மூலகத்தின் ஒத்த மூலகமாகவும், G_1 குலத்திலுள்ள $a_1 \, 0_1 \, b_1$ மூலகம் G குலத்திலுள்ள $a \, 0 \, b$ மூலகத்தின் ஒத்த மூலகமாகவும் இருக்குமாறு G, G_1 என்ற குலங்களிடையே ஒன்றுக்கொன்றுன உருமாற்றம் இருக்குமெனின், G குலம் G_1 குலத்துடன் ஐசோமார்பிக்கில் உள்ளது என்கிறோம். இது $G \simeq G_1$ எனக் குறியிடப்படும். இங்கு a_1 என்பது a-ன் விம்பம் எனப்படும்.

மாதிரி 21 :

G என்பது $(1, -1)$ என்ற கணத்தின் பெருக்குக் குலம் (Multiplicative group), G_1 என்பது எச்ச இனங்கள் $\{ 0, 1$ (மட்டு 2) $\}$ என்ற கூட்டுக் குலம் (Additive group) எனின், $G \simeq G_1$ என நிறுவுக.

G, G_1 என்ற குலங்களது சேர்க்கை அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

×	1	−1
1	1	−1
−1	−1	+1

G-ன் பெருக்கல் அட்டவணை

+	0	1
0	0	1
1	1	0

G_1 -ன் கூட்டல் அட்டவணை

இவ்விரு அட்டவணைகளிலிருந்து, 1, − 1 எனும் எண்களுக்கு { 0 } , { 1 } என்ற எச்ச இனங்களைப் பிரதியிடின், முதல் அட்டவணை இரண்டாவது அட்டவணையாக மாறுகிறது என அறிகிறோம்.

மீண்டும்,

$$1.1 = 1 \iff \{0\} + \{0\} = \{0\}$$

$$1.(-1) = -1 \iff \{0\} + \{1\} = \{1\}$$

$$(-1).1 = -1 \iff \{1\} + \{0\} = \{1\}$$

$$(-1).(-1) = 1 \iff \{1\} + \{1\} = \{0\}$$

எனவே $G \simeq G_1$.

மாதிரி 22 :

பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் $G = \{1, -1, i, -i\}$ ஒரு குலம், கூட்டல் மட்டு 4-ன்கீழ் $G_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ ஒரு குலம் எனின், $G \simeq G_1$ என நிறுவுக.

ஐசோமார்பிச உருமாற்றம் அதே வரிசை கொண்ட மூலகங்களுக்கிடையேதான் ஏற்படுத்தக் கூடும்.

$$1^1 = 1, (-1)^2 = 1, i^4 = 1, (-i)^4 = 1$$

எனவே 1, −1, i, $-i$ என்ற குலத்தின் மூலகங்களது வரிசை முறையே 1, 2, 4, 4. இவ்வாறே G_1 குலத்து மூலகங்களான 0, 1, 2, 3 என்பவைகளது வரிசைகள் முறையே 1, 4, 2, 4.

$$f(1) = 0, \quad f(-1) = 2$$

$$f(i) = 1, \quad f(-i) = 3$$

என்ற $f : G \to G_1$ உருமாற்றம் ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றமாகும்.

மேலும், $(i)(-i) = -i^2 = 1$

$$\therefore \quad f(i.-i) = f(1) = 0$$

$$= 1 \underset{4}{+} 3 = f(i) + f(-i).$$

அதாவது, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$.

எனவே f எனும் உருமாற்றம் குல சேர்க்கையைப் பாதுகாக்கிறது.

$$\therefore \quad G \simeq G_1.$$

மாதிரி 23 :

$G = \{ 1, \omega, \omega^2 \}$ என்பது பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலம், $G' = \{ I, (a, b, c), (a, c, b) \}$ ஒரு வரிசை மாற்றக்குலம் எனின் $G \simeq G'$ என நிறுவுக.

G குலத்து மூலகங்கள் $1, \omega, \omega^2$ ஆகியவற்றின் வரிசைகள் முறையே 1, 3, 3.

G' குலத்தின் மூலகங்கள் $I, (a, b, c), (a, c, b)$ ஆகியவற்றின் வரிசைகள் முறையே 1, 3, 3.

எனவே, $f(1) = 1$; $f(\omega) = (a, b, c)$; $f(\omega^2) = (a, c, b)$ என்று நாம் வரையறுப்பின், $f : G \rightarrow G'$ ஓர் ஒன்றுக்கொன்றுள உருமாற்றமாகும்.

மேலும், $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ என எளிதில் நிறுவலாம்.

ஆகவே, உருமாற்றம் குல சேர்க்கையைப் பாதுகாக்கிறது.

$$\therefore \quad G \simeq G'.$$

7·32. குலச் சேர்க்கைகளது மாற்றம் (Transference of Group Compositions)

தேற்றம் :

G ஒரு குலமெனவும், G_1 பெருக்கல் சேர்க்கையுள்ள கணம் எனவும் கொள்வோம். பின், $f(ab) = f(a) \cdot f(b) \; \forall \; a, b \in G$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் G-லிருந்து G_1-ன் மேல் ஒன்றுக்கொன்றுள ஒரு உருமாற்றம் இருக்குமெனின் G^1 கணம் ஒரு குலமாகும். மேலும், $G_1 \simeq G$.

நிருபணம் :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலத்திற்கான விதிகள் G_1-ல் பொருந்துமெனின் G_1 ஒரு குலமாகும்.

G_1-ன் எவையேனும் மூலகங்கள் a_1, b_1, c_1 எனவும், $f(a) = a_1$, $f(b) = b_1$, $f(c) = c_1$ எனவும் கொள்வோம். a, b, c என்பவை G-ன் மூலகங்களாகும்.

சேர்ப்பு விதி :

$$
\begin{aligned}
(a_1 . b_1) . c_1 &= [f(a) . f(b)] . f(c) \\
&= f(a . b) : f(c) \qquad [\text{கொள்கை}] \\
&= f(a b c) \\
&= f(a) . f(bc) \\
&= f(a) . [f(b) f(c)] \\
&= a_1 . (b_1 . c_1)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad (a_1 . b_1) . c_1 = a_1 . (b_1 . c_1)$$

எனவே சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

சர்வசம மூலகம்

குலம் G-ல் சர்வசம மூலகம் e எனின்,

$$a e = e a = a \ \forall \ a \in G.$$

$$
\begin{aligned}
[f(e) a_1 &= f(e) . f(a) \\
&= f(e a) \\
&= f(a) \\
&= a_1
\end{aligned}
$$

மேலும்,

$$
\begin{aligned}
a_1 [f(e) &= f(a) . f(e) \\
&= f(a e) \\
&= f(a) \\
&= a_1
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad [f(e)] a_1 = a_1 [f(e)]$$

எனவே, குலம் G_1-ல் சர்வசம மூலகம் $f(e)$. இது G-லுள்ள சர்வசம மூலகம் e-ன் விம்பமாகும்.

நேர்மாறு மூலகம் :

G ஒரு குலமாதலின்,

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e \ \forall \ a \in G$$

$\therefore \quad f(aa^{-1}) = f(e)$

அதாவது $f(a)\,f(a^{-1}) = f(e)$.

அதாவது $\quad a_1 f(a^{-1}) = f(e)$

$= G_1$-ன் சர்வசம மூலகம்.

இவ்வாறே,

$$a^{-1}a = e$$

$$\therefore \quad f(a^{-1}a) = f(e)$$

$$f(a^{-1})(f(a) = f(e)$$

$f(a^{-1})\,a_1 = f(e) = G_1$-ன் சர்வசம மூலகம்.

எனவே, G_1-ல் உள்ள a_1 மூலகத்தின் நேர்மாறு மூலகம் $f(a^{-1})$

அதாவது $(a_1)^{-1} = f(a^{-1})$

அதாவது $[f(a)]^{-1} = f(a^{-1})$.

எனவே G_1 ஒரு குலமாகும்.

7-33. கெய்லியின் தேற்றம் (Cayley's Theorem)

ஒவ்வொரு முடிவுள்ள குலம் G-ம் n குறியீடுகளில் உள்ள வரிசைமாற்ற குலத்துடன் ஐசோமார்பிக்கில் இருக்கும்.

நிரூபணம்:

G ஒரு முடிவுள்ள குலம் எனவும், அதன் வரிசை n எனவும் கொள்வோம்.

(அதாவது) $G = \{a_1, a_2, \ldots \ \ldots \ \ldots, a_n\}$

G குலத்தின் n மூலகங்களுள் ஒன்று b என்க. பின், a_1b, a_2b, $a_3 b$, … … $a_n b$ என்ற பெருக்கங்கள் வெவ்வேறானவை. இவை குலம் G-ன் மூலகங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $a_i b = a_j b$ எனின், (அதாவது மேற்கூறிய பெருக்கங்களில் எவையேனும் இரண்டு சமமெனின்) நீக்கல் விதியின்படி $a_i = a_j$ என்றாகும். இது குலம் G-ன் வரிசை n என்ற கூற்றுக்குப் புறம்பானதாகும். எனவே, a_1b, a_2b, a_3b, … …, a_nb என்பவை G-ன் யாதேனும் ஒரு வரிசையிலுள்ள n வெவ்வேறு மூலகங்களாகும்.

$$\therefore\ P_b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ ba_1 & ba_2 & ba_3 & \cdots\cdots & ba_n \end{pmatrix}$$

என்பது n குறியீடுகளில் (Symbols) ஒரு வரிசை மாற்றமாகும்.

$b = a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n$ எனப் பிரதியிடின் $P_1, P_2, \ldots \ldots, P_n$ என்ற n வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கப்பெறும்.

நாம் இனி $P_1, P_2, \ldots \ldots, P_n$ என்பவை ஒரு குலமாகும் என நிறுவுவோம்.

$$P_k = \begin{pmatrix} a_1, & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1\, a_k, & a_2\, a_k & \ldots & a_n\, a_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1\, a_j, & a_2\, a_j & \ldots & a_n\, a_j \\ a_1\, a_j\, a_k, & a_2\, a_j\, a_k & \ldots & a_n\, a_j\, a_k \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ P_j\, P_k = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_n \\ a_1\, a_j\, a_k, & a_2\, a_j\, a_k, & \ldots & a_n\, a_j\, a_k \end{pmatrix}$$

$$= P_m \text{ (என்க)}$$

இங்கு $a_j\, a_k = a_m \in G$.

எனவே $\{ P_1, P_2, \ldots, P_n \}$ என்ற குலத்தில் இணைச் சேர்க்கை யுள்ளது.

$\therefore$ a_j, P_j என்ற மூலகங்களுக்கிடையே ஒன்றுக் கொன்றான ஒத்தியைபு உள்ளது.

$$\therefore\ G \simeq \{ P_1, P_2, \ldots, P_n \}.$$

மாதிரி 24 :

$\{ 1, -1, i, -i \}$ என்ற பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் உள்ள குலம் ஐசோமார்பிக்கில் (Isomorphic) உள்ள ஒழுங் கான வரிசை மாற்றக் குலம் காண்க.

கெய்லியின் தேற்றப்படி வரிசை மாற்றக் குலம் கீழே தரப் பட்டுள்ளது.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} = I$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix} = (1, -1)(i, -i)$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \;\; i \;\; -1 \;\; -i)$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -i & i & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1 \;\; -i \;\; -1 \;\; i)$$

சேர்க்கை அட்டவணை

×	1	−1	i	$-i$
1	1	−1	i	$-i$
−1	−1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	−1	1
$-i$	$-i$	i	1	−1

எனவே $\{1, -1, i, -i\}$ என்ற குலம் $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ என்ற வரிசை மாற்றக் குலத்துக்கு ஐசோமார்பிக்காகும்.

7-34. வட்டக் குலங்கள் (Cyclic Groups)

ஒரு மூலகம் a ஆல் பிறப்பிக்கப்படும் ஒரு குலம் வட்டக்குலம் எனப்படும். இது $\{a\}$ எனக் குறிப்பிடப்படும். வட்டக்குலம் $\{a\}$ ஐப் பிறப்பிக்கும் மூலகம் a பிறப்பாக்கி (generator) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) ஒன்றின் முப்படி மூலகங்களைக் கொண்ட குலம் ஒரு வட்டக்குலம். இதன் பிறப்பாக்கி ω. அது $\{\omega\}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

(2) ஒன்றின் நான்கு நாற்படி மூலங்களைக் கொண்ட குலம் வட்டக்குலமாகும். இதன் பிறப்பாக்கி i. இது $\{ i \}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

தேற்றம் :

ஒரு வட்டக்குலத்தின் பிறப்பாக்கி a எனின், a^{-1} என்ற மூலகமும் அக் குலத்தின் பிறப்பாக்கியாகும்.

a ஒரு பிறப்பாக்கி எனின் a^n யாதாவதொரு முழு எண் அடுக்காகும்.

$a^n = (a^{-1})^{-n} = a^{-1}$ன் யாதாவதொரு முழு எண் அடுக்கு.

எனவே a^{-1} என்ற மூலகமும் வட்டக்குலம் $\{ a \}$ -ன் பிறப்பாக்கி ஆகும்.

இவ்வாறே கூட்டல் இணைச்சேர்க்கையின் கீழுள்ள ஒரு வட்டக்குலத்தில் a ஒரு பிறப்பாக்கி எனின், $-a$ எனும் மூலகமும் ஒரு பிறப்பாக்கியாகும்.

7·35. உட்குலங்கள் (Sub-groups)

G எனும் ஒரு குலத்திலுள்ள சில மூலகங்களைக்கொண்ட H எனும் ஒரு கணம் அதே இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் ஒரு குலத்தை அமைக்குமெனின், அது G குலத்தின் உட்குலம் எனப்படும்,

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) அனைத்து முழு எண்களது குலம் G-ல் அனைத்து இரட்டை எண்களைக்கொண்ட H எனும் குலம் G-ன் உட்குலமெனப்படும். குலம் H-ல் இணைச் சேர்க்கை கூட்டலாகும்.

(2) கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் அனைத்து முழு எண்களது குலம், அனைத்து விகிதமுறு எண்களது குலத்தின் உட்குலம்.

(3) விகிதமுறு நேரெண்களின் குலம் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் பூச்சியமில் மெய்யெண்களது குலத்தின் உட்குலமாகும்.

7·36. தகு, தகா உட்குலங்கள் (Proper and Improper sub-groups)

G எனும் ஒவ்வொரு குலத்திலும் இரு அற்பமான (trivial) உட்குலங்கள் உண்டு.

அவை, (1) G குலம்

(2) சர்வசம மூலகம் e மட்டுமே உள்ள கீழ்க்குலம்.

இவை இரண்டும் G குலத்தின் தகா உட்குலங்கள் எனப்படும். G-ன் ஏனைய உட்குலங்கள் தகு குலங்களாகும்.

தேற்றம் :

G எனும் ஒரு குலத்தில் H ஒரு கீழ்க்கணம் என்க. பின் வரும் விதிகள் H கணத்தில் பொருந்துமெனின், H கணம் G குலத்தின் உட் குலமாகும்.

(1) $a \circ b \in H \ \forall \ a, b \in H$

(2) $a^{-1} \in H \ \forall \ a \in H.$

நிரூபணம் :

G-லுள்ள அதே இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் H ஒரு குலமெனின், குலம் H குலம் G-ன் உட் குலமாகும்.

$$a \circ b \in H \ \forall \ a, b \in H$$

எனவே, H குலத்தில் இணைச் சேர்க்கை உண்டு.

$$a^{-1} \in H \ \forall \ a \in H$$

எனவே, H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கு நேர்மாறு மூலகம் உண்டு.

G எனும் குலத்தில் சேர்ப்பு விதி பொருந்துமாதலின், அதன் கீழ்க் கணமான H-லும் அது பொருந்தும்.

மேலும், $a \in H$, $a^{-1} \in$

$\therefore \ a \circ a^{-1} = e \in H.$

எனவே H-ல் சர்வ சம மூலகம் உண்டு.

$\therefore$ H ஓர் உட் குலமாகும்.

7-37. சிக்கல் (Complex)

G எனும் குலத்தில் H எனும் யாதேனும் ஒரு வெறுமையற்ற கணம் (Non-empty set) சிக்கல் எனப்படும்

உட் குலங்கள் அனைத்தும் சிக்கல்களாகும். ஆனால், சிக்கல்கள் அனைத்தும் உட் குலங்களல்ல.

தேற்றம் :

H எனும் ஒரு வெறுமையற்ற கீழ்க் கணம் G குலத்தின் உட் குலமாக அவசியமும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு

$$a \in H, \quad b \in H \implies a\,b^{-1} \in H.$$

நிரூபணம் :

கட்டுப்பாடு அவசியம்.

H ஓர் உட் குலம். இனி, $a\,b^{-1} \in H$ என நிறுவுவோம்.

$$b \in H, \quad \text{எனவே } b^{-1} \in H,$$

எனவே, H எனும் உட் குலத்திலுள்ள அனைத்து மூலகங்களுக்கும் நேர்மாறு மூலகங்கள் H-ல் உண்டு.

இணைச் சேர்க்கையின் கீழ்

$$a \in H, \quad b \in H \implies a\,b^{-1} \in H.$$

கட்டுப்பாடு போதுமானது.

$$a \in H, \quad b \in H \implies a\,b^{-1} \in H.$$

இனி H ஒரு உட்குலம் என நிறுவுவோம்.

$$a \in H, \quad b \in H \implies a\,b^{-1} \in H$$

$b = a$ எனின்

$$a \in H, \quad a \in H \implies a\,a^{-1} \in H$$
$$\implies e \in H.$$

எனவே, H-ல் சர்வசம மூலகம் உண்டு.

மேலும் $e \in H, \quad a \in H$

$$\therefore \quad e\,a^{-1} = a^{-1} \in H.$$

எனவே, நேர்மாறு மூலகம் உண்டு.

மீண்டும் $b \in H, \quad b^{-1} \in H.$

$$a \in H, \quad b^{-1} \in H.$$

$$\therefore \quad a\,(b^{-1})^{-1} \in H$$

அதாவது $a\,b \in H$.

எனவே H-ல் இணைச் சேர்க்கை உண்டு.

$\therefore$ H ஓர் உட்குலம்.

7-38. உட்குலத்தின் பண்புகள்

1. G குலத்தின் இரு உட்குலங்களது வெட்டு G-ன் உட்குலமாகும்.

H_1, H_2 என்பவை G-ன் உட்குலங்கள் எனக்கொள்வோம்.

$a, b \in H_1 \cap H_2$ எனின்,

$a \in H_1$

$b \in H_1$

$\therefore \quad a\,b \in H_1$

இவ்வாறே $a\,b \in H_2$

$\therefore \quad a\,b \in H_1 \cap H_2$.

மேலும், $a \in H_1 \;\; a \in H_2$

$\therefore \quad a^{-1} \in H_1,\; a^{-1} \in H_2$.

எனவே, $a^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

எனவே, $H_1 \cap H_2$ என்பது G-ன் உட்குலம்.

2. G குலத்தின் இரு உட்குலங்களது ஒன்றிணைப்பு ஓர் உட்குலமாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டாக,

G ஒரு முழு எண்களது குலம் எனக்கொள்வோம்.

$H_1 = \{ -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots \ldots \}$

$H_2 = \{ - \ldots - 6, -3, 0, 3, 6, \ldots \}$ எனின்

$H_1 \cup H_2 = \{ \ldots -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6, \ldots \}$

இங்கு $2 \in H_1 \cup H_2$

$3 \in H_1 \cup H_2$

ஆனால் $2 + 3 \notin H_1 \cup H_2$.

எனவே கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின்கீழ் $H_1 \cup H_2$ ஒரு குலமல்ல. $\therefore$ $H_1 \cup H_2$ என்பது G-ன் உட்குலமாகாது.

7-39. ஒரு வட்டக் குலத்தின் உட் குலங்கள்

ஒரு வட்டக் குத்த்தின் உட் குலங்களும் வட்டக் குலங்களாகும். வட்டக் குலம் G-ன் பிறப்பாக்கி a எனின், அதன் உட் குலம் H-ன் பிறப்பாக்கி a^m ஆகும். இங்கு m என்பது $a^m \in H$ என்ற கட்டுப்பாட்டின் கீழ் மிகச் சிறிய முழு எண்ணாகும்.

G எனும் குலத்தின் பிறப்பாக்கி a என்க. எனவே, உட் குலம் H-ல் a-ன் முழு எண் அடுக்குகளிருக்கும். மேலும் a^n ஒரு முழு எண் அடுக்கெனின் அதன் நேர்மாறு மூலகம் a^{-n}-ம் H-லிருக்கும்.

$$a^n \in H \text{ (என்க) } n > m.$$

$$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m} \text{ எனின்,}$$

$$n = mq + r, \quad 0 \leqslant r < m.$$

$$\therefore \quad a^n = a^{mq+r} = a^{mq} \,.\, a^r$$

$$a^{mq} \in H \qquad \therefore \quad a^{-mq} \,. \in H.$$

அதாவது, $a^n \in H$, $a^{-mq} \in H$.

$$\therefore \quad a^n \,.\, a^{-mq} \in H.$$

அதாவது, $a^{n-mq} \in H$

அதாவது, $a^r \in H \qquad (\because \quad n = mq + r).$

ஆனால் $r < m$. எனவே இது $a^m \in H$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் m மிகச் சிறிய முழு எண் என்ற தற்கோளுக்கு எதிர் மறுப்பாகும்.

$$\therefore \quad r = 0 \text{ எனவே } n = mq.$$

$$\therefore \quad a^n = a^{mq} = (a^m)^q$$

எனவே, H எனும் உட் குலத்தின் a^n என்ற ஒவ்வொரு மூலகமும் $(a^m)^q$ என்ற வடிவிலிருக்கும்.

எனவே, H-ன் பிறப்பாக்கி a^m. அதாவது, $H = \{ a^m \}$.

7-40. வலது, இடது சேர்மைக் கணங்கள் (Right and left Cosets)

வரையறை :

$H = \{h_1, h_2, \ldots \ldots, h_n\}$ என்பது குலம் G-ன் உட்குலம் எனக் கொள்வோம். G குலத்தின் யாதேனும் ஒரு மூலகம் a எனின்,

$$H\,a = \{h_1 a, h_2 a, \ldots \ldots, h_n a\}$$

என்பது a பிறப்பிக்கும் வலது சேர்மைக் கணம் (Right Coset) எனவும்,

$aH = \{ah_1, ah_2, \ldots \ldots, ah_n\}$ என்பது a பிறப்பிக்கும் இடது சேர்மைக் கணம் (Left Coset) எனவும் கூறப்படும்.

7-41. இலகுராஞ்சின் தேற்றம் (Lagrange's Theorem)

G எனும் முடிவுள்ள குலத்தின் உட்குலம் H-ன் வரிசை G குலத்தினது வரிசையை வகுக்குமெண்ணாகும்.

நிரூபணம் :

H எனும் உட்குலம் G எனும் குலம் ஆகியவற்றின் வரிசைகள் முறையே m, n எனக்கொள்வோம். G ஒரு முடிவுள்ள குலமாதலின், அதை முடிவுள்ள பல H-ன் இடது சேர்மைக் கணங்களாகப் பிரிக்கலாம். இவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட பலவேறு சேர்மைக் கணங்களின் எண்ணிக்கை q என்க. ஒவ்வொரு சேர்மைக் கணத்திலும் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை m ஆகும்.

எனவே, எல்லாச் சேர்மைக் கணங்களது மூலகங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை mq. இது G-ல் உள்ள மூலகங்களது எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும். $\therefore\ n = mq$.

அதாவது G-ன் வரிசை $=$ (H-ன் வரிசை) q. எனவே G-ன் வரிசையை H-ன் வரிசை வகுக்குமெண்.

கிளை 1 :

முடிவுள்ள குலம் ஒன்றினது மூலகங்களில் யாதேனும் ஒன்றினது வரிசை குலத்தின் வரிசையை வகுக்குமெண்ணாகும்.

G எனும் முடிவுள்ள குலத்தின் வரிசை n எனவும், G-லுள்ள a எனும் ஒரு மூலகத்தின் வரிசை m எனவும் கொள்வோம்.

எனவே, a ஐப் பிறப்பாக்கியாகக் கொண்ட வட்டக் குலம் $H = \{ a, a^2, a^3, \ldots, a^m = e \}$ ஓர் உட் குலமாகும். ($a \in H$, $b \in H \Longrightarrow ab \in H$). மேலும் H எனும் உட் குலத்தின் வரிசை m.

எனவே, இலகுராஞ்சின் தேற்றப்படி H எனும் உட் குலத்தின் வரிசை m, G எனும் குலத்தின் வரிசை n ஐ வகுக்கு மெண்ணாகும்.

அதாவது m எனும் எண் n ஐ வகுக்குமெண்.

மீண்டும், $a^n = a^{mq} = (a^m)^q = e^q = e$.

கிளை 2 :

ஒரு குலத்தின் வரிசை ஒரு பகாவெண் (Prime number) எனின், அக் குலம் ஒரு வட்டக் குலமாகும்.

G எனும் ஒரு குலத்தின் வரிசை p எனக் கொள்வோம். இங்கு p ஒரு பகாவெண். G குலத்தின் யாதேனும் ஒரு மூலகம் a எனவும், அதன் வரிசை m எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a^m = e.$$

இப்பொழுது a ஐப் பிறப்பாக்கியாகக் கொண்ட ஒரு வட்ட உட் குலத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அதாவது $H = \{ a, a^2, a^3, \ldots, a^m = e \}$.

இவ்வட்ட உட்குலத்தின் வரிசை m. எனவே, இது G குலத்தின் வரிசையை வகுக்குமெண். G குலத்தின் வரிசை p ஒரு பகா வெண்ணாதலின் $m = p$ ஆகும்.

எனவே, கொடுத்துள்ள p வரிசையுள்ள குலம் G-ன் மூலகங்கள் a-ன் முழு எண் அடுக்குகளாகும். ஆகவே, குலம் G ஒரு வட்டக் குலமாகும். மேலும் $m = p$.

$$\therefore \quad H = G.$$

எனவே, G ஒரு வட்டக்குலமாகும்.

மாதிரி 21 :

$\{ a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e \}$ என்ற குலத்தின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றினது வரிசையையும் காண்க.

$$(a)^6 = e$$
$$(a^2)^3 = a^6 = e$$
$$(a^3)^2 = a^6 = e$$
$$(a^4)^3 = a^{12} = (a^6)^2 = e^2 = e$$
$$(a^5)^6 = a^{30} = (a^6)^5 = e^5 = e.$$

எனவே, a, a^2, a^3, a^4, a^5 ஆகிய மூலங்களது வரிசைகள் முறையே 6, 3, 2, 3, 6, ஆகும்.

பயிற்சி 7·2

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ எனின், $AB \neq BA$ என நிறுவுக.

(2) $(1\ 2\ 3) \circ (3\ 1\ 2\ 4) = (1\ 4\ 3\ 2)$ என நிறுவுக.

(3) $(1\ 3\ 2\ 5) \circ (1\ 4\ 3) \circ (2\ 5\ 1)$ ஆகியவற்றை இரு இணையாத வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கமாக (two disjoint cycles) பெருக்கமாக எழுதுக.

(4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ எனின், P^2, P^3, P^4 காண்க.

(5) $P = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ எனின், P^3 காண்க.

(6) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ எனின், PQ, P^{-1} காண்க.

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற வரிசை மாற்றத்தை இரு இணையாத வட்ட வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கமாக எழுதுக.

(8) ஒரு முடிவுள்ள குலத்தின் a, b, ab என்ற மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றினது வரிசையும் 2 எனின் $ab = ba$ என நிறுவுக.

(9) ஒரு வட்டக் குலத்தை வரையறுத்து ஓர் உதாரணம் கொடுக்கவும்.

(10) $\{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$ என்ற குலத்தின் பிறப்பாக்கிகளைக் காண்க.

(11) $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\}$ என்ற குலத்தின் பிறப்பாக்கிகளைக் காண்க.

(12) ஒரு வட்டக் குலத்தின் x, x^{-1} மூலகங்களது வரிசைகள் சமமென நிறுவுக.

(13) கூட்டல் குலம் $\{0, 1, 2, 3, 4\}_{+5}$ ஒரு வட்டக் குலம் என நிறுவுக. அதன் பிறப்பாக்கிகளைக் காண்க.

(14) அதே வரிசையுள்ள இருவட்டக் குலங்கள் ஐசோமார்பிக் (Isomorphic) என நிறுவுக.

(15) $\{1, -1, i, -i\}$ என்ற பெருக்கல் இணைச்சேர்க்கையின் கீழுள்ள குலம் வரிசை மாற்றக் குலத்துக்கு ஐசோமார்பிக் என நிறுவுக.

(16) G எனும் குலத்தின் ஒவ்வொரு மூலகத்தினது நேர்மாறு மூலகமும் அதே மூலகமெனின், G ஓர் அபெலியன் குலம் என நிறுவுக.

(17) $\{1, -1, i, -i\}$ எனும் குலம் ஒரு வட்டக்குலம் என நிறுவுக. அதன் பிறப்பாக்கிகளைக் காண்க.

(18) $\{1, \omega, \omega^2\}$ என்ற பெருக்கல் இணைச்சேர்க்கையின் கீழுள்ள குலம் ஐசோமார்பிக்கில் இருக்கும் ஒழுங்கான வரிசை மாற்றக்குலம் காண்க.

(19) ஒரு வட்டக்குலத்தின் ஒவ்வோர் ஐசோமார்பிக் விம்பமும் (Isomorphic image) வட்டமானவை (Cyclic) என நிறுவுக.

விடைகள்

(3) (1 2)(3 5 4)

(4) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I.$$

(5) $P^3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$

(6) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(7) (1 5)(2 3 4)

(10) a, a^3. (11) a, a^5. (13) 2, 3.

8. வளையம்

(Ring)

8-1. கூட்டல் $+$, பெருக்கல் $.$ என்ற இரு இணைச் சேர்க்கைகள் கொண்ட ஒரு வெறுமையற்ற கணம் R-ல் பின்வரும் அடிகோள்கள் பொருந்துமெனின், அது ஒரு வளையம் (Ring) எனப்படும்.

கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை :

$a, b, c \in R$ எனின்

(R_1) $a + b \in R$ (கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை)

(R_2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (கூட்டல் சேர்ப்பு விதி)

(R_3) R-ல் 0 எனும் மூலகம் $a + 0 = 0 \ \forall \ a \in R$ என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருக்கும் (சர்வசம மூலகம்)

(R_4) $a + x = x + a = 0 \quad \forall \ a \in R$

அதாவது R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரு நேர்மாறு மூலகம் R-ல் இருக்கும்.

(R_5) $a + b = b + a$ (கூட்டல் மாற்று விதி)

பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை :

(R_6) $\forall \ a, b \in R, \ a \cdot b \in R$ (பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை)

(R_7) $\forall \ a, b, c \in R, \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (சேர்ப்பு விதி)

(R_8) $\forall \ a, b, c \in R, \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$

குறிப்பு :

ஒரு வளையத்தில் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் சர்வ சம மூலகமும் நேர்மாறு மூலகமும் இருக்க வேண்டிய அவசிய மில்லை. மேலும், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் மாற்றுவிதி பொருந்த வேண்டியதில்லை. மேற்கூறிய பண்புகளைத் தவிர வேறு சில பண்புகளும் வளையத்துக்கு இருக்கக் கூடும்.

மாதிரி 1 :

p, q என்பவை முழு எண்களெனின், $p + q\sqrt{2}$ வடிவிலுள்ள எண்களது கணம் S கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

கூட்டல் இணைச்சேர்க்கை :

S எனும் கணத்திலுள்ள யாதேனும் மூன்று எண்கள் $p_1 + q_1\sqrt{2}$, $p_2 + q_2\sqrt{2}$, $p_3 + q_3\sqrt{2}$ எனக்கொள்வோம்.

(R_1) இணைச்சேர்க்கை விதி (Binary Composition)

$$\begin{aligned}&(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2})\\ &\quad = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2}\\ &\quad = P + Q\sqrt{2} \in S.\end{aligned}$$

(R_2) சேர்ப்பு விதி (Associative Law)

$$\begin{aligned}&[(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2})] + (p_3 + q_3\sqrt{2})\\ &\quad = [(p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2}] + (p_3 + q_3\sqrt{2})\\ &\quad = (p_1 + p_4 + p_3) + (q_1 + q_2 + q_3)\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(p_1 + q_1\sqrt{2}) + [(p_2 + q_2\sqrt{2}) + (p_3 + q_3)\sqrt{2}]\\ &\quad = (p_1 + q_1\sqrt{2}) + [(p_2 + p_3) + (q_2 + q_3)\sqrt{2}]\\ &\quad = (p_1 + p_2 + p_3) + (q_1 + q_2 + q_3)\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &[(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2})] + (p_2 + q_3\sqrt{2})\\ &\quad = (p_1 + q_1\sqrt{2}) + [(p_2 + q_2\sqrt{2}) + (p_3 + q_3\sqrt{2})]\end{aligned}$$

(R_3) சர்வசம மூலகம் (Identity)

$$0 + 0\sqrt{2} \in S.$$

(R_4) நேர்மாறு மூலகம் (Inverse)

$$\begin{aligned}&(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (-p_1 - q_1\sqrt{2})\\ &\quad = 0 + 0\sqrt{2} \in S\end{aligned}$$

எனவே, $(p_1 + q_1\sqrt{2})$-ன் நேர்மாறு மூலகம் $-p_1 - q_1\sqrt{2}$.

அதாவது, மூலகங்கள் அனைத்திற்கும் நேர்மாறு மூலகங்கள் உண்டு.

(R_5) மாற்று விதி (Commutative Law)

$$(p_1 + q_1\sqrt{2} +)(p_2 + q_2\sqrt{2})$$
$$= (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2}$$

$$(p_2 + q_2\sqrt{2}) + (p_1 + q_1\sqrt{2})$$
$$= (p2 + p_1) + (q_2 + q_1)\sqrt{2}$$
$$= (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2}.$$

$$\therefore\ (p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_2 + q_2\sqrt{2}) + (p_1 + q_1\sqrt{2})$$

பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை :

(R_6) இணைச் சேர்க்கை (Binary Composition)

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 + q_2\sqrt{2})$$
$$= (p_1 p_2 + 2q_1 q_2) + (p_1 q_2 + p_2 q_1)\sqrt{2}$$
$$= P_1 + Q_1\sqrt{2} \in S.$$

(R_7) சேர்ப்பு விதி (Associative law)

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) \cdot [(p_2 + q_2\sqrt{2}) \cdot (p_3 + q_3\sqrt{2})]$$
$$= [(p_1 + q_2\sqrt{2}) \cdot (p_2 + q_2\sqrt{2})] \cdot (p_3 + q_3\sqrt{2})$$

(R_8) பங்கீட்டு விதி (Distributive law)

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) \cdot [(p_2 + q_2\sqrt{2}) + (p_3 + q_3\sqrt{2})]$$
$$= (p_1 + q_1\sqrt{2}) \cdot [(p_2 + p_3) + (q_2 + q_3)\sqrt{2}]$$
$$= [p_1(p_2 + p_3) + 2q_1(q_2 + q_3)] + [q_1(p_2 + p_3) + p_1(q_2 + q_3)]\sqrt{2}$$
$$= [(p_1 p_2 + 2q_1 q_2) + (q_1 p_2 + q_2 p_1)\sqrt{2}] + [(p_1 p_3 + 2q_1 q_3) + (q_1 p_3 + q_3 p_1)\sqrt{2}]$$
$$= (p_1 + q_1\sqrt{2}) \cdot (p_2 + q_2\sqrt{2}) + (p_1 + q_1\sqrt{2}) \cdot (p_3 + q_3\sqrt{2})$$

இவ்வாறே,

$$[(p_2 + q_2 \sqrt{2}) + (p_3 + q_3 \sqrt{2})] \cdot (p_1 + q_1 \sqrt{2})$$
$$= (p_2 + q_2 \sqrt{2}) \cdot (p_1 + q_1 \sqrt{2}) + (p_3 + q_3 \sqrt{2}) \cdot (p_1 + q_1 \sqrt{2}).$$

எனவே, S ஒரு வளையமாகும்.

மாதிரி 2 :

கூட்டல் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் முழு எண்களது கணம் I ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

வளையத்திற்கான விதிகள் கணம் I-ல் பொருந்துமெனின் அது ஒரு வளையமாகும்.

கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை :

(R_1) இரு முழு எண்களது கூட்டல் ஒரு முழு எண் ; எனவே கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை I-ல் உண்டு.

அதாவது $a + b \in I \quad \forall\, a, b \in I$

(R_2) $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall\; a, b, c \in I$ எனவே சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

(R_3) $a + 0 = 0 + a \quad \forall\; a \in I$

எனவே, சர்வசம மூலகம் உண்டு.

(R_4) $(-a) + a = 0 = a + (-a) \quad \forall\; a \in I$

எனவே I-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்துக்கும் நேர்மாறு மூலகம் உண்டு. a-ன் நேர்மாறு மூலகம் $-a$.

(R_5) $a + b = b + a \quad \forall\; a, b \in I$ எனவே மாற்றுவிதி பொருந்துகிறது.

பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை

(R_6) இரு முழு எண்களது பெருக்கம் ஒரு முழு எண்

அதாவது $a \,.\, b \in I \quad \forall\; a, b \in I$

$\therefore$ பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை உண்டு.

(R_7) சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

அதாவது $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b)c \quad \forall\; a, b, c \in I$

(R_8) பங்கீட்டு விதி

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \quad \forall\, a, b, c \in I$$

எனவே, முழு எண்களது கணம் I ஒரு வளையமாகும்.

மாதிரி 3 :

கூட்டல், பெருக்கல் மட்டு 5-ன் கீழ் $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ என்ற கணம் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

கூட்டல் மட்டு 5 இணைச் சேர்க்கை :

(R_1) $0 + 1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 4 = 0$ (மட்டு 5)

$2 + 4 = 1$ (மட்டு 5)

$3 + 4 = 2$ (மட்டு 5)

(R_2) $1 + (2 + 3) = 6 \equiv 1$ (மட்டு 5)

$(1 + 2) + 3 = 6 \equiv 1$ (மட்டு 5)

எனவே, சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

(R_3) சர்வசம மூலகம் 0 உண்டு.

(R_4) 0, 1, 2, 3, 4 ஆகிய எண்களது நேர்மாறு மூலகங்கள் முறையே 0, 4, 3, 2, 1. எனவே, அனைத்து எண்களுக்கும் நேர்மாறு எண்கள் உண்டு,

(R_5) $0 + 1 = 1 = 1 + 0$

$1 + 2 = 3 = 2 + 1$

$3 + 4 \equiv 2$ (மட்டு 5)

$4 + 3 \equiv 2$ (மட்டு 5)

எனவே மாற்று விதி பொருந்தும்.

பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை :

(R_6) பெருக்கல் இணைச்சேர்க்கை கணம் S-ல் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டாக,

$1 \cdot 2 = 2, \quad 2 \cdot 3 = 1, \quad 3 \cdot 4 = 2$

(R_7) சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$

$2 (3 \cdot 4) = 2 \cdot 2 = 4$

எனவே, $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$.

(R_8) பங்கீட்டு விதி கணம் S-ல் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$1 \cdot (2+3) = 1 \cdot 1 = 1$

$(2+3) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$

எனவே, கணம் S ஒரு வளையமாகும்.

மாதிரி 4 :

எச்ச இனம் மட்டு m கணம், கூட்டல், பெருக்கல் மட்டு m இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

$$R = [\{0\} , \{1\} , \{2\} , ..., \{m-1\}$$

எனும் கணம் எச்ச இனம் மட்டு m ஆகும்.

$\{a_1\}$, $\{a_2\}$ என்பவை R-ன் இரு மூலகங்கள் எனக் கொள்வோம்.

கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை :

(R_1) $\{a_1\} + \{a_2\} = \{a_1+a_2\} = \{a\}$

இங்கு a என்பது (a_1+a_2)ஐ mஆல் வகுக்கக் கிடைக்கப் பெறும் மிகச் சிறிய நேரெண் மீதியாகும்.

$0 \leqslant a < m.$

$\therefore \quad \{a\} \in R.$

எனவே, இரு எச்ச இனங்களின் கூட்டல் ஓர் இணைச் சேர்க்கையாகும்.

(R_2) $[\{a_1\} + \{a_2\}] + \{a_3\} = \{a_1\} + \{a_2\} + \{a_3\}$

$\{a_1\} + [\{a_2\} + \{a_3\} = \{a_1\} + \{a_2\} + \{a_3\}$

இவை இரண்டும் mஆல் வகுபடும்போது கிடைக்கப்பெறும் மீதிகள் ஒன்றேயாகும். எனவே, கணம் R-ல் சேர்ப்புவிதி பொருந்தும்.

(R_3) இதன் சர்வ சம மூலகம் $\{ 0 \}$ ஆகும்.

$$\because \quad \{0\} + \{a\} = \{0+a\} = \{a\}$$

$$\{a\} + \{0\} = \{a+0\} = \{a\} .$$

$$(R_4) \quad \{a\} + \{m-a\} = \{m\} = \{0\} .$$

$\{0\}$ மூலகம் சர்வசம மூலகமாதலின் $\{a\}$ எனும் யாதாமொரு மூலகத்தின் நேர்மாறு மூலகம் $\{m-a\}$.

$$(R_5) \quad \{a_1\} + \{a_2\} = \{a_1+a_2\} = \{a\} \in R$$

$$\{a_2\} + \{a_1\} + \{a_2+a_1\} = \{a\} \in R.$$

இங்கு (a_1+a_2)ஐ mஆல் வகுக்கக் கிடைக்கப்பெறும் மிகச்சிறிய நேரெண் $\{a\}$.

எனவே, மாற்று விதி பொருந்தும்.

அதாவது R கணம் ஓர் அபெலியன் குலமாகும்.

பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை :

$$(R_6) \quad \{ a_1 \} . \{ a_2 \} = \{ a_1 \, a_2 \} = \{ a \}$$

இங்கு $a_1 \, a_2$ ஐ mஆல் வகுக்கக் கிடைக்கப்பெறும் மிகச்சிறிய நேரெண் a ஆகும். $\therefore$ $\{a\} \in R$. எனவே, இரு எச்ச இனங்களின் பெருக்கல் ஓர் இணைச் சேர்க்கையாகும்.

$$(R_7) \quad [\{a_1\} . \{a_2\}] . \{a_3\} = \{a_1\} . [\{a_2\} . \{a_3\}]$$
$$= \{a_1\} . \{a_2\} . \{a_3\}$$

இவை இரண்டிற்கும் $a_1 \, a_2 \, a_3$ ஐ mஆல் பெருக்கக் கிடைக்கப் பெறும் மீதிகள் ஒன்றேயாகும். எனவே, சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

$$(R_8) \quad \{a_1\} . [\{a_2\} + \{a_3\}] = \{a_1\} . \{a_2 + a_3\}$$
$$= \{a_1 \, a_2\} = \{a_1 a_3\} .$$

$$[\{a_2\} + \{a_3\}] . \{a_1\} = \{a_2+a_3\} . \{a_1\}$$
$$= \{a_2 \, a_1\} + \{a_3 \, a_1\}$$

எனவே, கணம் R ஒரு வளையமாகும்.

மாதிரி 5 :

அனைத்து $n \times n$ அணிகள் கொண்ட கணம் M கூட்டல் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக. அணிகளது மூலகங்கள் அனைத்து முழு எண்கள் கொண்ட வளையத்தின் எண்களாகும்.

கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை :

(R_1) இரு $n \times n$ அணிகளது கூட்டல் ஒரு $n \times n$ அணியாதலின், அணிகளது கூட்டல் ஓர் இணைச் சேர்க்கையாகும்.

(R_2) $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall\ A, B, C \in M.$

$\therefore$ அணிகளுக்குச் சேர்ப்பு விதி பொருந்தும்.

(R_3) $A + 0 = 0 + A = A \quad \forall\ A \in M.$

எனவே பூச்சிய அணி 0 சர்வ சம அணியாகும்.

(R_4) $A + (-A) = (-A) + A = 0, \quad \forall\ A \in M.$

எனவே, A என்ற யாதாமொரு அணியின் நேர்மாறு அணி $-A$ ஆகும்.

(R_5) $A + B = B + A, \quad \forall\ A, B \in M.$

$\because$ அணிகளது கூட்டலுக்குப் பரிமாற்று விதி பொருந்தும்.

எனவே, பரிமாற்றுவிதி M-ல் பொருந்தும்.

பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கை :

(R_6) இரு $n \times n$ அணிகளது பெருக்கல் ஒரு $n \times n$ அணியாதலின், அணிகளது பெருக்கல் ஓர் இணைச் சேர்க்கையாகும்.

(R_7) அணிகளது பெருக்கலுக்குச் சேர்ப்பு விதி பொருந்துமாதலின்,

$$(A.B)\,C = A.(B.C) \quad \forall\ A, B, C \in M.$$

(R_8) பங்கீட்டு விதி அணிகளுக்குப் பொருந்தும்.

எனவே, $A.(B+C) = A.B + A.C \qquad \forall\ A, B, C \in M.$

$$(B+C).A = B.A + C.A$$

எனவே, அணிகளது கணம் M ஒரு வளையமாகும்.

பயிற்சி 8·1

1. கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் மெய்யெண்களது கணம் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

2. கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் விகிதமுறு எண்களது கணம் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

3. கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் சிக்கலெண்களின் கணம் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

4. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்ற எச்சங்களது கணம் கூட்டல், பெருக்கல் மட்டு 7 இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் ஒரு வளையமென நிறுவுக.

5. இயற்கை எண்களது கணம் ஒரு வளையமல்ல என நிறுவுக.

6. மெய்யெண்களை கெழுக்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின்கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

7. கொடுத்துள்ள m என்ற முழு எண்ணின் மடங்குகளைக் கொண்ட கணம் கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின்கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

8. 2×2 அணிகளது கணம் கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின்கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

9.

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

,

$\times$	a	b
a	a	a
b	a	b

என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $\{a, b\}$ என்ற கணம் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

(10) அனைத்து விகிதமுறு நேரெண்களின் கணம் ஒரு வளையமாகுமா என ஆராய்க.

வளையங்களின் வகைகள்

8-2. பரிமாற்று வளையம் (Commutative Ring)

ஒரு வளையத்தில் பெருக்கற் பரிமாற்று விதி பொருந்துமெனின், அது பரிமாற்று வளையம் எனப்படும்.

அதாவது, $a . b = b . a, \forall a, b \in R$

எடுத்துக்காட்டாக,

பூச்சியத்துடன் கூடிய இரட்டை எண்களது கணம் ஒரு பரிமாற்று வளையமாகும்.

8-3. கீழ் வளையம் (Sub-ring)

S எனும் வளையத்தின் அனைத்து மூலகங்களும் R எனும் பிறிதொரு வளையத்திலிருப்பின், வளையம் S வளையம் R-ன் 'கீழ் வளையம்' எனப்படும்.

அதாவது, R ஒரு வளையம் எண்க. R-ன் வெறுமையற்ற கீழ்க் கணம் S பின் வரும் விதிகளுக்குட்பட்டு R-ன் கீழ் வளையம் எனப்படும்.

(1) பெருக்கல், கூட்டல் இணைச் சேர்க்கைகள் கணம் S-ல் இருக்கும். அதாவது, R-ல் வரையறுக்கப்பட்ட அதே இணைச் சேர்க்கைகள் S-லும் இருத்தல் வேண்டும்.

(2) கணம் S-ல் a எனும் மூலகமிருப்பின், $-a$ என்ற மூலகமும் அதிலிருக்க வேண்டும். கீழ் வளையத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(1) முழு எண்களது கணத்தில் இரட்டை எண்களது கணம் ஒரு கீழ் வளையமாகும்.

(2) அனைத்து மெய்யெண்களது வளையத்தின் கீழ் வளையம் அனைத்து விகிதமுறு எண்களது கணமாகும்.

(3) அனைத்து மெய்யெண்களது வளையம் அனைத்து சிக்கலெண்களது வளையத்தின் கீழ் வளையமாகும்.

(4) மெய்யெண்களைக் கொண்ட அனைத்து $n \times n$ அணிகளது வளையத்தின் கீழ் வளையம், விகிதமுறு எண்களைக் கொண்ட அனைத்து $n \times n$ அணிகளது வளையமாகும்.

(5) ஒற்றை எண்களது கணம் அனைத்து முழு எண்களது வளையத்தின் கீழ் வளையமல்ல. ஏனெனில், இரு ஒற்றை எண்களது கூட்டல் ஓர் இரட்டை எண்ணாதலின், கூட்டல் இணைச் சேர்க்கை ஒற்றை எண்களது கணத்தில் இல்லை.

8-4. ஒருமை கொண்ட வளையம் (Ring with unity)

ஒரு வளையத்தில் பெருக்கு சர்வ சம மூலகம் (Multiplicative Identity) இருப்பின், அது ஒருமை கொண்ட வளையம் எனப்படும்.

ஒருமை கொண்ட வளையத்தில், ஒன்றின் பெருக்கு நேர்மாறு மூலகம் (Multiplicative Inverse) அதுவேயாகும். பிற பூச்சியமில் மூலகங்களுக்குப் பெருக்கு நேர்மாறு மூலகங்கள் இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

முழு எண்களது வளையத்தில் அலகு மூலகம் (Unit element) 1 எனும் முழு எண்ணாகும். அணிகளது வளையத்தில் அலகு மூலகம் அணி அலகாகும் (Unit Matrix). இரட்டை எண்களது வளையத்தில் அலகு மூலகம் இல்லையாதலின், அது ஒருமையற்ற வளையம் (Ring without unity) எனப்படும்.

8-5. ஒழுங்கான மூலகம் (Regular element)

வளையம் R-ல் a எனும் ஒரு பூச்சியமில் மூலகம்

$$\left.\begin{array}{l} a x = a y \Longrightarrow x = y \\ x a = y a \Longrightarrow x = y \end{array}\right\} \forall\ x, y \in R.$$

என்ற கட்டுப்பாட்டிலிருப்பின், அது ஓர் ஒழுங்கான மூலகம் எனப்படும்.

ஒருமை கொண்ட வளையத்தில் ஒருமை ஓர் ஒழுங்கான மூலகமாகும். எனவே, நீக்கல் விதி பொருந்தும் மூலகங்கள் ஒழுங்கு மூலகங்களாகும்.

8-6. வளையத்தின் சில பண்புகள்

கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் R ஒரு வளையம் எனவும், $a, b, c \in$ R எனவும் கொள்வோம்.

பின் கீழ் வரும் பண்புகள் மெய்யாகும்.

(1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

நிரூபணம் :

$$0 = 0 + 0$$

$$\therefore \quad a \,.\, 0 = a \,.\, (0 + 0)$$

$$= a \,.\, 0 + a \,.\, 0$$

$$\therefore \quad -(a \,.\, 0) + (a \,.\, 0) = -(a \,.\, 0) + (a \,.\, 0 + a \,.\, 0)$$

$$= \{-(a \,.\, 0) + (a \,.\, 0)\} + a \,.\, 0$$

$$= 0 + a \,.\, 0$$

அதாவது $\quad 0 = a \,.\, 0.$

இவ்வாறே, $\quad 0 \,.\, a = 0.$

எனவே, $\quad a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0$

(2) $a \,.\, (-b) = -(a \,.\, b) = (-a) \,.\, b$

நிரூபணம் :

$$0 = a \,.\, 0 = a \,.\, (-b + b)$$

$$= a \,.\, (-b) + a \,.\, b$$

$$\therefore \; 0 + \{-(a \,.\, b)\} = \{a \,.\, (-b) + a \,.\, b\} + \{-(a \,.\, b)\}$$

$$= a \,.\, (-b) + \{a \,.\, b + [-(a \,.\, b)]\}$$

$$= a \,.\, (-b) + 0$$

$$\therefore \quad -(a \,.\, b) = a \,.\, (-b)$$

இவ்வாறே, $(-a) \,.\, b = -(a \,.\, b)$

எனவே, $\quad a \,.\, (-b) = -(a \,.\, b) = (-a) \,.\, b$

(3) $(-a) \,.\, (-b) = a \,.\, b$

நிரூபணம் :

2 ஆவது பண்பிலிருந்து,

$$a \,.\, (-b) = -(a \,.\, b)$$

a-க்குப் பதில் $-a$ எனப் பிரதியிடின்,

$$(-a) \,.\, (-b) = -\{(-a) \,.\, b\}$$

$$= -\{-(a \,.\, b)\}$$

$$= a \,.\, b$$

$\therefore \quad (-a) \,.\, (-b) = a \,.\, b$

(4) $a \,.\, (b - c) = a \,.\, b - a \,.\, c$

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned} a \,.\, (b - c) &= a \,.\, \{b + (-c)\} \\ &= a \,.\, b + a \,.\, (-c) \\ &= a \,.\, b + \{-(a \,.\, c)\} \\ &= a \,.\, b - a \,.\, c. \end{aligned}$$

(5) $(b - c) \,.\, a = b \,.\, a - c \,.\, a.$

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned} (b - c) \,.\, a &= [b + (-c)] \,.\, a \\ &= b \,.\, a + (-c) \,.\, a \\ &= b \,.\, a + \{-(c \,.\, a)\} \\ &= b \,.\, a - c \cdot a. \end{aligned}$$

6. ஒருமை கொண்ட கணம் R-ல் ஒருமை மூலகம் e எனின்,

(i) $(-e) \,.\, a = -a, \ a \in R.$

(ii) $(-e) \,.\, (-e) = e.$

நிரூபணம் :

(i)
$$\begin{aligned} a + (-e) \,.\, a &= e \,.\, a + (-e) \,.\, a \\ &= [e + (-e)] \,.\, a \\ &= 0 \,.\, a \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (-e) \,.\, a = -a.$$

(ii) $(-e) \,.\, a = -a$ [(i)-லிருந்து]

a-க்கு $-e$ எனப்பிரதியிடின்,

$$\begin{aligned} (-e) \,.\, (-e) &= -(-e) \\ &= e. \end{aligned}$$

8-7. பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் (Divisors of Zero)

ஒரு வளையத்தின் இரு பூச்சியமில் மூலகங்கள் a, b எனவும், $a \cdot b = 0$ எனவும் கொள்வோம். பின் a என்பது பூச்சியத்தின் இடது வகுக்குமெண் எனவும், b என்பது பூச்சியத்தின் வலது வகுக்குமெண் எனவும் கூறப்படும். மேலும் a, b என்பவை பூச்சியத்தின் தகு வகுக்குமெண்கள் (proper divisors) எனவும் கூறப்படும்.

$a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$, அல்லது $b = 0$ எனின், வளையம் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்களற்ற வளையம் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்களற்ற வளையம் எனப்படும். இரு பூச்சிமில் எண்களது பெருக்கம் பூச்சிய எண்ணுகை இருக்கமுடியாது. எனவே, இவ்வகை வகுக்குமெண்கள், எண்களது வளையத்தில் இருக்கமுடியாது.

அணிகளது வளையத்தில் இரு பூச்சியமில் அணிகளது பெருக்கம் ஒரு பூச்சிய அணியாக இருக்கக் கூடுமாதலின், இவ்வகை வகுக்கு மெண்கள் அணிகளது வளையத்திலிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ எனின்,

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

இங்கு, $A \neq 0$, $B \neq 0$. ஆனல், $AB = 0$.

(2) கூட்டல், பெருக்கல் மட்டு 6-ன் கீழுள்ள முழு எண்களது வளையத்தில்,

$$2 \cdot 3 = 6 \;\; = 0 \text{ (மட்டு 6)}$$
$$3 \cdot 4 = 12 = 0 \text{ (மட்டு 6)}$$

இங்கு, பூச்சியமில் இரு எண்களது பெருக்கம் பூச்சியமாகும்.

8-8. வளையத்தில் நீக்கல் விதி

R ஒரு வளையம் எனவும், $a, b, c \in R$ எனவும் கொள்வோம்.

பின்,

$$a \neq 0, \;\; a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c$$
$$a \neq 0, \;\; b \cdot a = c \cdot a \Longrightarrow b = c$$

எனின்,

வளையம் R-ல் நீக்கல் விதி பொருந்தும்.

8-9. தேற்றம்

வளையம் R-ல் நீக்கல் விதி பொருந்துமெனின், அதில் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் இரா.

நிருபணம் :

வளையம் R-ல் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் இல்லை எனக் கொள்வோம்.

$a, b, c \in R$ எனவும் $a \neq 0$, $a \cdot b = a \cdot c$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a \cdot (b-c) = 0.$$

வளையல் R-ல் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் கிடையா. மேலும் $a \neq 0$.

$$\therefore \quad b - c = 0$$

அதாவது $b = c$.

எனவே, $a \neq 0$, $a \cdot b = a \cdot c$ எனின்

$$b = c.$$

இவ்வாறே $a \neq 0$, $b \cdot a = c \cdot a$ எனின்

$$b = c$$

என நிறுவலாம்.

எனவே R-ல் நீக்கல் விதி பொருந்தும்.

இனி, R-ல் நீக்கல் விதி பொருந்தும் எனக்கொண்டு அதில் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் இரா என நிறுவுவோம்.

இயலுமெனின், R-ல் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் உண்டு எனக் கொள்வோம்.

அதாவது $a \neq 0$, $b \neq 0$ ஆனால் $a \cdot b = 0$.

$$\therefore \quad a \cdot b = a \cdot 0$$

நீக்கல் விதிப்படி $b = 0$ என்றாகும். ஆனால், இது நமது தற்கோளுக்குப் புறம்பானது. எனவே, R-ல் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் கிடையா.

மாதிரி 6 :

வளையம் R-ல் $a^2 = a \ \forall\ a \in R$ எனின், பின்வருபனவற்றை நிறுவுக.

(i) $a + a = 0 \quad \forall\ a \in R.$

அதாவது ஒவ்வொரு மூலகத்தினது கூட்டல் நேர்மாறு மூலகம் அதுவேயாகும்.

(ii) $a + b = 0 \implies a = b$

(iii) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall \quad a, b \in R$

அதாவது R ஒரு பரிமாற்று வளையமாகும்.

நிருபணம் :

(i) $a + a = 0 \quad \forall \quad a \in R.$

$a \in R, \ \ b \in R \qquad \therefore \ \ a + a \in R.$

$(a + a)^2 = a + a$ (கொள்கை)

$\therefore \ \ (a + a) \cdot (a + a) = a + a$

அதாவது $(a + a) \cdot a + (a + a) \cdot a = a + a$

அதாவது $(a^2 + a^2) + (a^2 + a^2) = a + a$

அதாவது $(a + a) + (a + a) = a + a \quad (\because \ a^2 = a)$

அதாவது $(a + a) + (a + a) = (a + a) + 0$

$\therefore \ \ a + a = 0.$

(ii) $a + b = 0 \implies a = b$

$a + b = 0$

$\therefore \ \ a + b = a + a \qquad (\because \ a + a = 0)$

$\therefore \ \ b = a$

(iii) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall \quad a, b \in R.$

$(a + b)^2 = a + b \qquad (\because \ a^2 = a)$

$\therefore \ \ (a + b) \cdot (a + b) = a + b$

அதாவது $(a+b).a+(a+b).b=a+b$

அதாவது $a^2+b.a+a.b+b^2=a+b$

அதாவது $(a+b.a)+(a.b+b)=a+b$

$\therefore\ (a+b)+(b.a+a.b)=a+b$

எனவே, $b.a+a.b=0$

அதாவது $b.a=a.b$ [(ii)-ன் படி].

8-10. வகுத்தல் வளையம் (Division Ring)

பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்ட வளையம் R ஒரு வகுத்தல் வளையம் அல்லது சீரற்ற களம் (Skew field) எனப்படும்.

(i) குறைந்தது இரு மூலகங்களாவது R-ல் இருக்க வேண்டும்.

(ii) வளையம் R ஒருமை (Unity) யுடையதாக இருக்க வேண்டும்.

(iii) R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு பூச்சியமில் மூலகத்திற்கும் ஒரு பெருக்கு நேர்மாறு மூலகம் இருக்க வேண்டும்.

8-11. எண் அரங்கம் (Integral Domain)

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலகமும், ஒருமையும் கொண்ட பூச்சியத்தின் வகுக்கு மெண்களற்ற ஒரு பரிமாற்று வளையம் R, எண் அரங்கம் எனப்படும்.

பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்களற்ற அரங்கமெனின்

$$a.b=0 \Longrightarrow a=0 \text{ அல்லது, } b=0\ \forall\ a,b\in R.$$

$a, b, c\in R$ எனின், R ஓர் அரங்கமாயிருக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

(1) $a+b\in R$

(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$

(3) $a+0=a,\quad 0\in R$

அதாவது, கூட்டு சர்வ சம மூலகம் 0.

(4) $a+(-a)=(-a)+a=0\ \forall\ a\in R$

(5) $a+b=b+a.$

(6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(7) $a \cdot b = b \cdot a$

(8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$

(9) $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0$

அதாவது பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் கிடையா.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) a, b முழு எண்களெனின் $a + bi$ வடிவிலுள்ள எண்களது வளையம் ஓர் எண் அரங்கமாகும்.

(2) ஒருமையுடைய எண்களது வளையம் ஓர் எண் அரங்கம்.

(3) இயற்கை எண்களது கணம் ஒரு வளையமல்ல. எனவே, அது எண் அரங்கமாக இருக்க முடியாது.

(4) இரட்டை எண்களது கணம் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்களற்ற ஒரு பரிமாற்று வளையம். எனினும், அது ஒருமையற்ற வளையமாதலின், அது எண் அரங்கமல்ல.

(5) a, b முழு எண்களெனின் $a + b\sqrt{2}$ வடிவிலுள்ள எண்களது வளையம் ஓர் எண் அரங்கமாகும். இதன் பூச்சிய மூலகமும், ஒருமை மூலகமும் முறையே $0 + 0\sqrt{2}$, $1 + 0\sqrt{2}$ ஆகும்.

8-12. களம்

F எனும் எண் அரங்கத்தில் பூச்சியமில் மூலகங்கள் அனைத்திற்கும் பெருக்கு நேர்மாறு மூலகங்கள் F-ல் உண்டெனின், அது ஒரு களம் எனப்படும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலகமுடைய F எனும் கணம் கூட்டல், பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் ஒரு களமாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

$a, b, c \in F$ எனின்

(1) $a + b \in F$

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(3) $a + 0 = 0 + a$

அதாவது சர்வசம மூலகம் 0 உண்டு.

(4) $a+(-a)=0 \quad \forall a \in F$

(5) $a+b=(b+a)$

(6) $a \cdot b \in F$

(7) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$

(8) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$

$(b+c) \cdot a=b \cdot a+c \quad a \cdot$

(9) $a \cdot 1=a \quad \forall a \in F$

அதாவது பெருக்கு சர்வசம மூலகம் 1 F-ல் உண்டு.

(10) $a^{-1} \cdot a=1 \quad \forall a \in F$

அதாவது F-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கு a^{-1} என்ற பெருக்கு நேர்மாறு மூலகம் F-ல் உண்டு.

(11) $a \cdot b=b \cdot a.$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

பின்வரும் வளையங்கள் களங்களாகும் :

(1) விகிதமுறு எண்களது வளையம்

(2) மெய்யெண்களது வளையம்

(3) a, b விகிதமுறு எண்களெனின், $a+b\sqrt{2}$ வடிவிலுள்ள எண்களது வளையம்

(4) சிக்கலெண்களது வளையம்

(5) p ஒரு பகா எண் (Prime number) எனின், கூட்டல் பெருக்கல் மட்டு p-ன் கீழுள்ள கூட்டு முழு எண்களது கணம்.

8-13. கந்தழிகள் (Ideals)

ஒரு வளையம் R-ன் வெறுமையற்ற கீழ்க் கணம் S பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டு ஒரு கந்தழி (Ideal) எனப்படும்.

(1) கூட்டல் இணைச் சேர்க்கையின் கீழ் வளையம் R-ன் கீழ் வளையமாக S இருக்கவேண்டும்.

(2) $a \cdot r \in R,\ r \cdot a \in R \ \forall a, r \in S.$ ஒவ்வொரு வளையம் R-லும் இரு தகா கந்தழிகள் (Improper Ideals) உண்டு. அவையாவன (i) வளையம் R (ii) பூச்சியம் மட்டும் கொண்ட கந்தழி.

இவை முறையே அலகு கந்தழி (Unit Ideal), பூச்சியக் கந்தழி (Null Ideal) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) முழு எண்களது வளையத்தின் ஒவ்வொரு கீழ் வளையமும் m எனும் யாதேனும் ஒரு முழு எண்ணின் மடங்குகளைக் கொண்டிருக்கும். எனவே, ஒவ்வொரு கீழ் வளையமும் முழு எண்களது வளையத்தின் கந்தழிகளாகும்.

(2) மெய்யெண்களது வளையத்தின் கீழ் வளையம் விகிதமுறு எண்களது வளையமாகும். ஆனால், இது மெய்யெண்களது வளையத்தின் கந்தழியல்ல.

8-14. வளையங்களின் ஹோமோமார்பிசமும் (Homomorphism) ஐசோமார்பிசமும் (Isomorphism)

பின் வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்குட்பட்டு R எனும் வளையத்திலிருந்து R' எனும் வளையத்திற்குள் செய்யப்படும் f எனும் உருமாற்றம் ஹோமோமார்பிசம் (Homomorphism) எனப்படும்.

(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(2) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \;\forall\; a, b \in R$

f ஓர் ஒன்றுக் கொன்றான மேல் உருமாற்றம் (one to one onto mapping) எனின், R-லிருந்து R'-க்குள் செய்யும் f எனும் ஹோமாமார்பிசம், ஐசோமார்பிசம் (Isomorphism) எனப்படும்.

மாதிரி 7 :

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ என்ற 2×2 அணிகளது கணம் S 2×2 அணிகளது வளையத்தின் கீழ்வளையம் என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$ என்பவை S-ன் இரு மூலகங்கள் எனக் கொள்வோம்.

$$A - B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{bmatrix} \in S.$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \in S.$$

அதாவது $A - B \in S, \; AB \in S \;\; \forall \;\; A, B \in S.$

எனவே, S ஒரு கீழ் வளையமாகும்.

மாதிரி 8 :

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ என்ற வடிவிலுள்ள அனைத்து 2×2 அணிகளது கணம் M வளையம் என நிறுவுக. பெருக்கல் சேர்ப்பு விதி, பங்கீட்டு விதி இவை இரண்டும் M-ல் பொருந்துமா எனச் சரி பார்க்கவும். வளையத்தின் பூச்சிய மூலகத்தையும், ஒருமை மூலகத்தையும் காண்க.

அனைத்து $n \times n$ அணிகளது கணம் ஒரு வளையம் என நாம் ஏற்கெனவே நிறுவியுள்ளோம்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

எனக் கொள்வோம்.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

என எளிதில் நிறுவலாம்.

மேலும், $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+4 \\ 2+0 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+0 \\ 0+4 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad AB \neq BA.$

எனவே இது பரிமாற்று வளையமல்ல.

வளையம் M-ன் பூச்சிய மூலகம் $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

வளையம் M-ன் ஒருமை மூலகம் $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

மீண்டும்,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனின்}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

அதாவது $A \neq 0$, $B \neq 0$. ஆனால் $AB = 0$.

எனவே, வளையம் M-ல் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் உண்டு.

பயிற்சி 8·2

(1) $\begin{bmatrix} \alpha + i\beta & \alpha + i\delta \\ -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{bmatrix}$ வடிவிலுள்ள அனைத்து 2×2 அணிகளின் கணம் ஒரு வகுத்தல் வளையம் என நிறுவுக. மேலும், இது களமல்ல எனவும் நிறுவுக. (இங்கு α, β, γ, δ மெய்யெண்களாகும்).

(2) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ வடிவிலுள்ள அனைத்து 2×2 அணிகளது கணம் 2×2 அணிகளது வளையத்தின் கீழ் வளையம் என நிறுவுக.

(3) விகிதமுறு எண்களது வளையத்தின் கீழ் வளையம் முழு எண்களது கணம் என நிறுவுக,

(4) m ஒரு பகாவெண் (Prime numbers) எனின், கூட்டல், பெருக்கல் மட்டு m-ன் கீழ் கூட்டு முழு எண்களது கணம் m மூலகங்கள் கொண்ட முடிவுள்ள களம் என நிறுவுக.

(5) a, b என்பவை விகிதமுறு எண்களெனின், $a + b\sqrt{2}$ வடிவிலுள்ள அனைத்து மெய்யெண்களது கணம் கூட்டல் பெருக்கல் இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் ஒரு களம் என நிறுவுக.

(6) m ஒரு கூட்டு முழு எண் எனின், எச்ச இனங்கள் மட்டு m கொண்ட கணம், கூட்டல், பெருக்கல் மட்டு m-ன் கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக. m ஒரு பகாவெண் எனின் இவ் வளையத்தில் பூச்சியத்தின் வகுக்குமெண்கள் இரா எனவும் நிறுவுக.

(7) $[0, 1]$ இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள மெய் மதிப்புடைய x-ன் தொடர்புடைச் சார்புகளின் கணம்,

$$(f + g)\,x = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)\,x = f(x) \cdot g(x)$$

என்று வரையறுக்கப்பட்ட இணைச் சேர்க்கைகளின் கீழ் ஒரு வளையம் என நிறுவுக.

III. நுண் கணிதம்

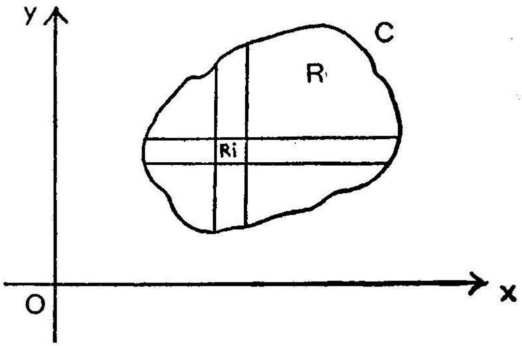
(Calculus)

9. மடங்குத் தொகையீடுகள்

(Multiple Integrals)

9·1. இரு மாறித் தொகை—வரையறை (Double Integral)

ஒரு xy தளத்தில் R என்பது C என்ற மூடிய ஒரு வளைவினால் அடைபட்ட அரங்கம் (closed region) எனக் கொள்வோம்.



படம் 19.

R அடைத்த அரங்கமாதலின் வளைவின் மீதுள்ள புள்ளிகளும் R அரங்கத்தைச் சேர்ந்தவையாகும். இவ்வரங்கில் $f(x, y)$ எனும் சார்பு x, y மாறிகளில் தொடர்ச்சியான ஒரு மதிப்புடைய சார்பு (Continuous single valued function) என்க. எவையேனும் சில கோடுகளால் R அரங்கை n சிறு அரங்குகளாக (sub-regions) பிரிப்போம். அவை $R_1, R_2, \ldots, R_n$ எனவும், அவற்றின் பரப்பு $\Delta R_1, \Delta R_2, \ldots, \Delta R_n$ எனவும் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு சிறு அரங்கிலும் ஒரு புள்ளி வீதம் $P_1, P_2, \ldots, P_n$ என்ற n புள்ளிகளில் சார்பின் மதிப்பு $f(P_1), f(P_2), \ldots f(P_n)$ என்க.

இனி, பின் வரும் கூட்டுத் தொகையைக் கவனிப்போம்.

$$A = f(P_1)\,\Delta R_1 + f(P_2)\,\Delta R_2 + \dots + f(P_n)\,\Delta R_n$$

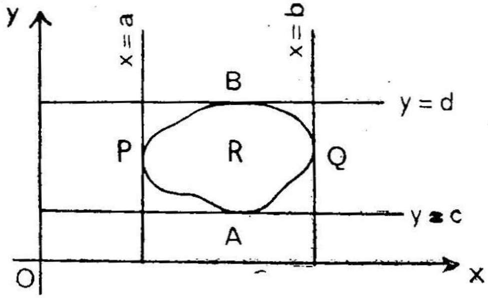
$$= \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta R_i.$$

$n \to \infty$, $\Delta R_i \to 0$ எனின், கூட்டுத் தொகையின் எல்லை R அரங்கில் $f(x, y)$ சார்பின் இரு மாறிக் கூட்டுத் தொகை எனப்படும்.

இது $\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy$ எனக் குறியிடப் படும்.

அதாவது, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(P_i)\,\Delta R_i = \iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy.$

9-2. இரு மாறிக் கூட்டுத் தொகைகள் காணுதல்



படம் 20.

$APBQ$ என்ற வளைவினால் அடைக்கப்பட்ட அரங்கில் $f(x, y)$ தொடர்ச்சியான ஒரு மதிப்புடைய சார்பு எனக் கொள்வோம். APB, AQB வளைவகளின் சமன்பாடுகள் $x = \phi_1(y)$, $x = \phi_1(y)$ என்க. இவ் வளைவில் மீச்சிறு, மீப்பெரு x ஆயத் தொலைகள் கொண்ட புள்ளிகள் P, Q எனவும், மீச்சிறு, மீப்பெரு y ஆயத் தொலைகள் கொண்ட புள்ளிகள் A, B எனவும் கொள்க. அரங்கு R, $x = a$, $x = b$; $y = c$, $y = d$ என்ற கோடுகளுக்குள் அடைபட்டுள்ளது.

(a, b) இடைவெளியையும், (c, d) இடைவெளியையும் முறையே y, x ஆயங்களுக்கிணையான கோடுகளால் சமபாகங்களாகப் பிரிக்கவும். இப்பொழு R அரங்கு பல அரங்குகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. சிறு அரங்குகளை

$$\Delta R_{ij}, \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$ என்போம்.

$$\Delta R_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j.$$

$\Delta \; R_{ij}$ என்ற சிறு அரங்கில் $P_i \, (x_{ij}, y_{ij})$ ஒரு புள்ளி எனவும், அதில் சார்பின் மதிப்பு $f \, (x_{ij}, y_{ij})$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad S = \sum_{i=1, j=1}^{n, P} f(x_{ij}, y_{ij}) \; \Delta \; R_{ij}$$

$$= \sum_{i, j} f(x_{ij} \; y_{ij}) \; \Delta \; x_i \; \Delta \; y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \Delta \; y_j \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{ij} \; y_{ij}) \; \Delta \; x_i \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \Delta \; y_j \left[\int_{\phi_1 (y_j)}^{\phi_2 (y_j)} f(x_i \; y_j) \, dx_i \right]$$

$$\left(\because \text{ எல்லை } \sum_{i=1}^{n} f(x_{ij} \; y_{ij}) \; \Delta \; x_i = \int_{\phi_1}^{\phi_3} f(x, y_j) \, dx \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \Delta \; y_j \; F(y_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} F(y_j) \, \Delta \, y_j$$

$$= \int_c^d F(y)\, dy$$

$$\left(\because \text{ எல்லை } \sum_{j=1}^{p} F(y_j) \, \Delta \, y_j = \int_c^d F(y)\, dy \right)$$
$$p \to \infty$$

= ஒரு மாறிலி.

குறிப்பு :

(1) $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ என்ற வளைவுகளாலும் $x = a$, $x = b$ என்ற கோடுகளாலும் அடைபட்டுள்ள அரங்கத்தில் $f(x, y)$-ன் தொகை

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \text{ ஆகும்.}$$

(2) $x = a$, $x = b$; $y = c$, $y = d$ என்ற செவ்வகத்தால் அடைப்பட்ட அரங்கில் $f(x, y)$-ன் தொகை

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

(3) இரு மாறித் தொகைகளில் மாறிகளின் எல்லைகள் மாறிலிகள் எனின், தொகையின் வரிசையை (Order of Integral) விருப்பப்படி அமைத்துக் கொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாக, குறிப்பு 2-ல் உள்ள அரங்கில் $f(x, y)$-ன் தொகை

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

ஆனல், y-ன் எல்லைகள் x-ன் சார்புகளெனின், x-ன் புதிய எல்லைகளை y-ன் சார்புகளாகவும், y-ன் எல்லைகளை மாறிகளாகவும் காணவேண்டும்.

மாதிரி 1 :

$$\int_0^3 \int_1^2 xy\, dy\, dx$$ ஐ இரு வழிகளில் காண்க.

(i) $$\int_0^3 \int_1^2 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^3 x\left(\frac{y^2}{2}\right)_1^2 dx$$

$$= \int_0^3 x\left(2 - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^3 \frac{3}{2} x\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^3 = \frac{3}{2}\left[\frac{9}{2}\right] = \frac{27}{4}.$$

(ii) $$\int_0^3 \int_1^2 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 \int_0^3 xy\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 y\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^3 dy$$

$$= \int_1^2 \frac{9}{2} y \, dy$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)_1^2 = \frac{9}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4}.$$

எனவே, $\displaystyle\int_0^3 \int_1^2 xy \, dy \, dx = \int_1^2 \int_0^3 xy \, dx \, dy = \frac{27}{4}.$

மாதிரி 2 :

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{r \, dr \, d\theta}{(r^2 + a^2)^2}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\int_0^{\infty} \frac{r \, dr}{(r^2 + a^2)} = \left[-\frac{1}{2(r^2 + a^2)}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2a^2}.$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{r}{(r^2 + a^2)^2} \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2a^2} \, d\theta$$

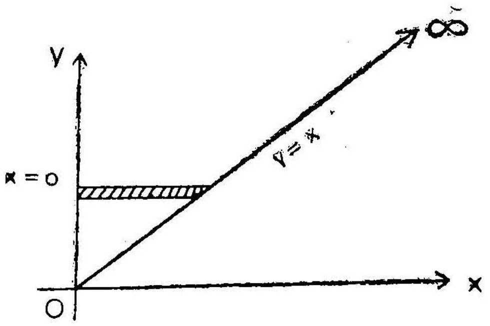
$$= \frac{1}{2a^2} [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{4a^2}.$$

மாதிரி 3 :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dy$$-ன் வரிசையை மாற்றி மதிப்புக் காண்க.

தொகை காண வேண்டிய அரங்கு $x=0$, $y=x$ என்ற கோடுகளாலும், கந்தழி எல்லையாலும் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 21.

x ஆயத்துக்கிணையான நீள்வரித் துண்டுகளைக் கொள்வோம். இவற்றின் ஒரு முனை y ஆயத்தின் மீதும் $(x=0)$, பிரிதொரு முனை $y=x$ என்ற கோட்டின் மீதுமுள்ளது.

எனவே, x-ன் எல்லை 0-விருந்து y வரையிலும், y-ன் எல்லை 0-விருந்து கந்தழி வரையிலுமாகும்,

$$\therefore \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} (x)_0^y\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} (y - 0)\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} \cdot y\, dy$$

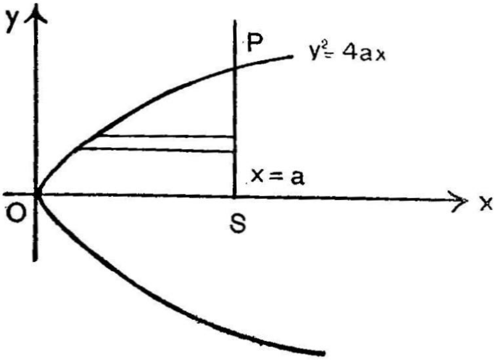
$$= \int_0^\infty e^{-y}\, dy$$

$$= -\left[e^{-y} \right]_0^\infty = 1.$$

மாதிரி 4 :

கீழ்க்காணும் தொகையின் வரிசையை மாற்றி மதிப்பு காண்க.

$$\int_0^a \int_0^{2\sqrt{ax}} x^2\, dx\, dy$$



$OS = a$
$SP = 2a$

படம் 22.

இங்குத் தொகை காண வேண்டிய அரங்கு $y = 0$, $y = 2\sqrt{ax}$; $x = 0$, $x = a$ கோடுகளால் அடைபடும் அரங்காகும். அதாவது OPS ஆகும். x ஆயத்திற்கிணையான நீள்வரித் துண்டுகளைக்

கொள்வோம். அதன் ஒரு முனை $y^2 = 4ax$ பரவளையின் மீதும், பிறிதொரு முனை $x = a$ கோட்டின் மீதுமுள்ளது. P புள்ளி $(a, 2a)$ ஆதலின், y-ன் எல்லைகள் 0-லிருந்து $2a$ வரையுமாகும்.

$$\therefore \int_0^{\infty} \int_0^{2\sqrt{ax}} x^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2a} \int_{y^2/4a}^{a} x^2 \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2a} \left(\frac{x^3}{3}\right)_{y^2/4a}^{a} dy$$

$$= \int_0^{2a} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{y^6}{192\, a^3}\right) dy$$

$$= \left(\frac{a^3}{3} y - \frac{1}{192\, a^3} \frac{y^7}{7}\right)_0^{2a}$$

$$= \left(\frac{2a^4}{3} - \frac{128 a^7}{7 \times 192 a^3}\right) = \left(\frac{2}{3} a^4 - \frac{2}{21} a^4\right)$$

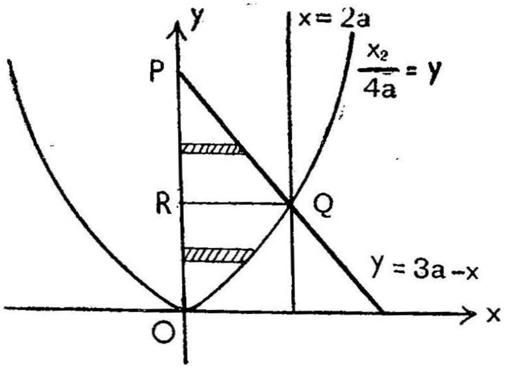
$$= \frac{4}{7} a^4.$$

மாதிரி 5 :

கீழ்க்காணும் தொகையின் வரிசையை மாற்றி மதிப்பு காண்க.

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} xy \, dx \, dy.$$

தொகை காணவேண்டிய அரங்கம் $x = 0$, $x = 2a$; $y = \frac{x^2}{4a}$, $y = 3a - x$ என்ற கோடுகளால் அடைக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது OPQ ஆகும்.



படம் 23

$x^2 = 4ay$ வளைவும், $y = 3a - x$ கோடும், வெட்டும்புள்ளி $Q(2a, a)$. x ஆயத்துக்கிணையாக Q வழி வரையும் கோடு y ஆயத்தை R-ல் வெட்டுகிறது. OPQ எனும் அரங்கம் OQR, RQP என்ற இரு அரங்கங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

அரங்கம் ORQ-ல் x ஆயத்திற்கிணையாக வரையும் நீள் வரித் துண்டுகளது ஒரு முனை $x = 0$ கோட்டின் மீதும் மறுமுனை $x = \sqrt{4ay}$ பரவளைவின் மீதுமுள்ளது. எனவே, x-ன் எல்லைகள் 0-விருந்து $\sqrt{4ay}$ வரை ஆகும். $Q(2a, a)$ ஆதலின் y-ன் எல்லை 0-விருந்து a வரை ஆகும்.

அரங்கம் RQP-ல் x ஆயத்திற்கிணையாக வரையும் நீள் வரித் துண்டுகளின் ஒரு முனை $x = 0$ கோட்டிலும் மறுமுனை $x = (3a - y)$ கோட்டின் மீதுமுள்ளது. எனவே, x-ன் எல்லைகள் 0-விருந்து $(3y - y)$ வரை இருக்கும். $P(0, 3a)$ ஆதலின், y-ன் எல்லைகள் a-விருந்து $3a$ வரை இருக்கும்.

$$\therefore \int_0^a \int_{x^2/4a}^{3a-x} xy\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\sqrt{ay}} xy\,dx\,dy + \int_a^{3a} \int_0^{(3a-y)} xy\,dx\,dy.$$

$$= \int_0^a \left(\frac{yx^2}{2}\right)_0^{2\sqrt{ay}} dy + \int_a^{3a} \left(\frac{yx^2}{2}\right)_0^{3a-y} dy$$

$$= \int_0^a 2ay^2\,dy + \int_a^{3a} \frac{y(3a-y)^2}{2}\,dy$$

$$= 2a\int_0^a y^2\,dy + \frac{1}{2}\int_a^{3a} (9a^2y - 6ay^2 + y^3)\,dy$$

$$= 2a\left(\frac{y^3}{3}\right)_0^a + \frac{1}{2}\left[\frac{9a^2y^2}{2} - \frac{6ay^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]_a^{3a}$$

$$= \frac{2a^4}{3} + \frac{1}{2}\left[\frac{81a^4}{2} - 54a^4 + \frac{81a^4}{4} - \frac{9a^4}{2} - \frac{6a^4}{3} + \frac{a^4}{4}\right]$$

$$= \frac{2a^4}{3} + \frac{3a^4}{12} = \frac{11a^4}{12}$$

$$\therefore \int_0^a \int_{x^2/4a}^{3a-x} xy\,dx\,dy = \frac{11}{12}a^4.$$

பயிற்சி 9·1

கீழ்க்காணும் இரு மாறித் தொகையீடுகளின் மதிப்பைக் காண்க.

(1) $\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

(2) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xy\, dy\, dx$

(3) $\int_0^1 \int_{2x-1}^{x^2} (xy - x^2)\, dy\, dx$

(4) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (xy - x^2)\, dx\, dy$

(5) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x + y)\, dy\, dx$

(6) $\int_0^1 \int_3^5 (x^2 - 2xy)\, dx\, dy$

(7) $\int_0^a \int_{x/2}^{x} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

(8) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{a(1 - \cos\theta)} r^2\, dr\, d\theta$

(9) $$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dy\ dx$$

(10) $$\int_0^{\pi} \int_0^{\cos\theta} r \sin\theta\ dr\ d\theta$$

கீழ்க்காணும் தொகைகளின் வரிசையை மாற்றி கணக்கிடுக.

(11) $$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} xy\ dx\ dy$$

(12) $$\int_0^a \int_y^a \frac{x}{x^2 + y^2}\ dy\ dx$$

(13) $$\int_0^a \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\ dx\ dy$$

(14) $$\int_0^4 \int_{4-\sqrt{16-y^2}}^{4+\sqrt{16-y^2}} dy\ dx$$

(15) நிறுவுக :

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{-1} (\sin x \sin y)\ dx\ dy = \pi/2\,(\pi/2 - 1)$$

(16) தொகை காணும் அரங்கம் $y = 0,\ y = x,\ x = 1$ எனும் முக்கோணமெனின்,

$\int\int \sqrt{(4x^2 - y^2)}\ dx\ dy$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(17) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$; $x = 2$, $x = 4$ என்ற கோடுகளால் அடைபட்ட அரங்கம் R எனின்,

$$\iint_R (2x - y)\, dA$$ காண்க.

(18) $y^2 = x$, $y^2 = 4 - x$, $y = 0$ என்ற வளைவுகளால் அடைபடும் அரங்கத்தில் $\iint x^2 y\, dx\, dy$ காண்க.

விடைகள்

(1) $\frac{10}{3}$ (2) $\frac{1}{8}a^4$ (3) $-\frac{1}{30}$

(4) $\frac{1}{168}$ (5) $\frac{2}{3}a^8$ (6) $\frac{9}{16}$

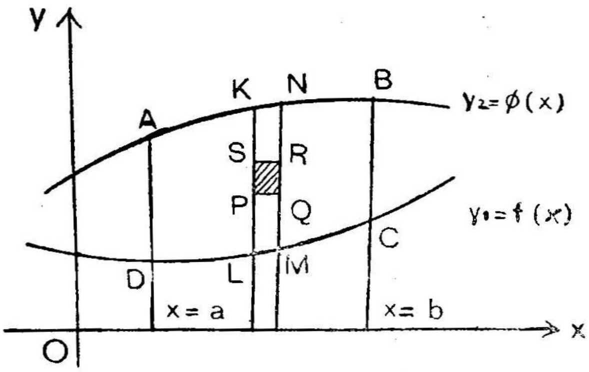
(9) $\frac{\pi a^3}{6}$ (10) $\frac{1}{3}$ (11) $\frac{3a^4}{8}$

(12) $\frac{\pi a}{4}$ (13) $\pi[f(a) - f(0)]$

(16) $\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

9-3. இருமாறித் தொகையீடுகளின் பயன்கள் (Applications of Double Integral)

$x = a$, $x = b$ என்ற கோடுகளாலும் $y = f(x)$, $y = \phi(x)$ என்ற வளைவுகளாலும் அடைபடும் பரப்பைக் காணுதல்.



படம் 24.

அரங்கத்தினுள் P, Q என்ற யாதேனும் இரு புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x, y), $(x + \Delta x, \ y + \Delta y)$ என்றவாறு குறிக்கவும்.

$PQRS$ என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பு

$$= PQ \cdot QR$$

$$= \Delta x \cdot \Delta y.$$

அரங்கம் $ABCD$ முழுவதும் $PQRS$ ஐப்போன்ற சிறு செவ்வகங்களால் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம்.

எனவே, தேவையான பரப்பு இவ்வகைச் செவ்வகங்கள் அனைத்தினது கூட்டுத் தொகையாகும்.

x ஐ மாறிலியாகக் கொள்வோமெனின், $LMKN$ என்ற நிலைக்குத்து நீள்வரித்துண்டின் பரப்பு,

$$\underset{\Delta y \to 0}{\text{எல்லை}} \ \Delta x \sum_{y=y_1}^{y=y_2} \Delta y$$

$$= \ \Delta x \int_{y_1}^{y_2} dy$$

இப்பொழுது அரங்கமானது $LMNK$ போன்ற நிலைக்குத்து நீள்வரித்துண்டுகளாலானவையாகக் கொள்வோம்.

எனவே, அரங்கத்தின் பரப்பு

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \ \sum_{x=a}^{x=b} \Delta x \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$= \int_{a}^{b} \int_{y_1}^{y_2} dy\ dx$$

எனவே, $ABCD$ என்ற அரங்கத்தின் பரப்பு

$$A = \int_{a}^{b} \int_{f(x)}^{\phi(x)} dy\ dx.$$

குறிப்பு 1 :

இவ்வாறே புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ பின் வருவனவற்றிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\ dx\ dy}{\iint_R dx\ dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\ dx\ dy}{\iint_R dx\ dy}$$

(2) (i) மேலும் xOy தளத்துக்குச் செங்குத்தாக ஆதிவழிச் செல்லும் கோட்டைப் பற்றிய ஒரு கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரப்பின் சடத்துவ திறப்புத்திறன்

$$\iint_R (x^2 + y^2)\ dx\ dy$$

(ii) x ஆயத்தைப் பற்றிய சடத்துவ திருப்புத் திறன்

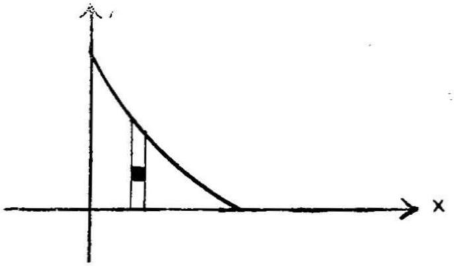
$$\iint_R y^2\ dx\ dy.$$

(iii) y ஆயத்தைப் பற்றிய சடத்துவ திருப்புத் திறன்

$$\iint_R x^2\,dx\,dy.$$

மாதிரி 6 :

$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ என்ற வளைவு $x=0$, $y=0$ கோடுகளால் அடைபட்ட பரப்பைக் கணக்கிடுக.



படம் 25.

$$A=\iint_R dx\,dy.$$

x ஐ மாறிலியாகக் கொண்டால் y-ன் எல்லை 0 முதல் $(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$ வரையாகும்.

பின் x-ன் எல்லை 0 முதல் a வரையாகும்.

$$\therefore\quad A=\int_0^a\left(\int_0^{y_1} dy\right)dx,\qquad y_1=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$$

$$=\int_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\,dx$$

$$=\int_{\pi/2}^{0} a\sin^3\theta\,(-3a\cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta \qquad x=a\cos^3\theta$$

$$dx=-3a\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 3a^2 \left(\frac{\pi}{32}\right)$$

$$= \frac{3\pi a^2}{32}$$

எனவே பரப்பு $= \dfrac{3\pi a^2}{32}$

மாதிரி 7 :

$= x$, $y = 6 - x^2$ என்ற வளைவுகளால் அடைபெறும் பரப்பளவைக் காண்க.

$$A = \iint_R dy\, dx$$

$= 6 - x^2$, $y = x$ வளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண வேண்டும்.

$$\therefore \quad 6 - x^2 = x$$

அதாவது, $x^2 + x - 6 = 0$

$$\therefore \quad (x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore \quad x = -3, \quad x = 2$$

ஆகவே, வெட்டும் புள்ளிகள் $(-3, -3)$, $(2, 2)$.

$$\therefore \quad A = \iint dy\, dx$$

$$= \int_{-3}^{2} \left(\int_x^{6-x^2} dy \right) dx$$

$$= \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\, dx$$

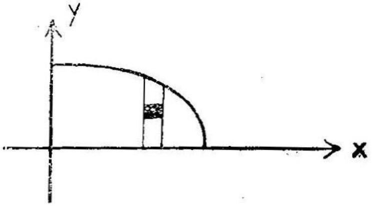
$$= \left(6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)_{-3}^{2}$$

$$= \frac{22}{3} + \frac{81}{6}$$

$$= \frac{125}{6}.$$

மாதிரி 8 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தினது முதற்கால் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்.



படம் 26.

$$\bar{x} = \frac{\int\int x\,dy\,dx}{\int\int dy\,dx}\,; \quad \bar{y} = \frac{\int\int y\,dy\,dx}{\int\int dy\,dx}$$

x ஐ மாறிலியாகக் கொண்டால், y-ன் எல்லைகள் 0 முதல் $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ வரையும், பின் x-ன் எல்லைகள் 0 முதல் a வரையும் ஆகும்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_0^a x \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} dy\,dx}{\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} dy\,dx}$$

$$\int_0^a x \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx = \int_0^a x \left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right] dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[+\frac{a^3}{3}\right] = +\frac{ba^2}{3}$$

$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi ab}{4}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{ba^2}{3}\cdot\frac{4}{\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}$$

இவ்வாறே $\bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$

மாதிரி 9 :

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் அதன் தளத்துக்குச் செங்குத்தாக மையம் வழிச்செல்லும் கோட்டைப்பற்றி சடத்துவ திருப்புத்திறன் காண்க.

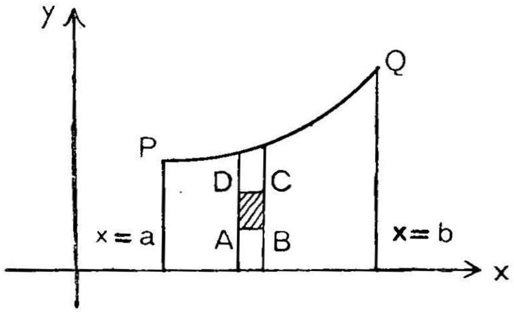
$$I = \iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

இதன் மதிப்பைக் கணக்கிட கோண சதுரக் கூறுகளாக மாற்றுவோம். வட்டம் $r = a$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} r^2\, r\, dr\, dr\, \theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\, d\theta = \frac{a^4}{4}\, (\theta)_0^{2\pi} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

9-4. சுற்றுவதால் பெறும் திடப்பொருளின் கொள்ளளவு (Volume of Solid of revolution)



படம் 27.

$y = f(x)$ வளைவு $x = a$, $x = b$, $y = 0$ என்ற கோடுகளால் அடைபெறும் பரப்பை x ஆயத்தைப் பற்றி சுற்றுவதால் கிடைக்கப்பெறும் திடப்பொருளின் கொள்ளளவு காணுதல்.

$A(x, y)$, $C\,(x + \Delta x, y + \Delta y)$ எனக் கொள்க. $ABCD$-ன் பரப்பு $\Delta x \cdot \Delta y \cdot$ ஆகும்.

இதை x ஆயத்தைப்பற்றி சுற்றுவதால் கிடைக்கும் திடப் பொருளின் கொள்ளளவு,

$$= \pi\,[\,(y + \Delta y)^2 - y^2]\ \Delta x$$

$$= \pi\,[y^2 + 2y\,\Delta\,y + (\Delta\,y)^2 - y^2]\ \Delta\ x$$

$$= \pi\,[2y\,\Delta y + (\Delta\,y)^2]\ \Delta\ x$$

$$= 2\,\pi\,y\,\Delta\,y\,\Delta\,x \quad \text{(தோராயமாக).}$$

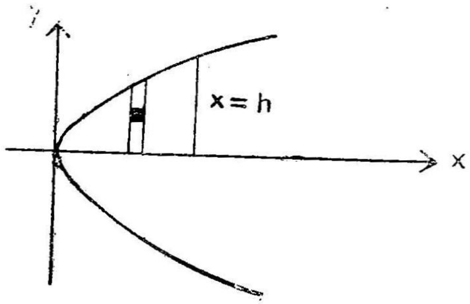
எனவே, மொத்த கொள்ளளவு

$$V = \text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \sum_{y=0}^{y=f(x)} 2\,\pi\,y\,\Delta\,y\,\Delta\,x$$

$$= 2\pi \int_a^b \int_0^{f(x)} y\,dy\,dx.$$

மாதிரி 10 :

$y^2 = 4ax$ பரவளைவு $x = h$, $y = 0$ என்ற கோடுகளால் அடைபெறும் பரப்பை x ஆயத்தைப்பற்றி சுற்றுவதால் கிடைக்கப்பெறும் திடப்பொருளின் கொள்ளளவு காண்க.



படம் 28.

$$V = \int \int 2\pi y\,dy\,dx$$

x ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு y-ன் எல்லைகள் 0-லிருந்து $2\sqrt{ax}$ வரையிலும் ஆகும். x-ன் எல்லைகள் 0-லிருந்து h வரை,

$$\therefore \quad V = \int_0^h \int_0^{2\sqrt{ax}} 2\pi\, y\, dy\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^h \left(\int_0^{2\sqrt{ax}} y\, dy \right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^h \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^{2\sqrt{ax}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^h \frac{4ax}{2}\, dx$$

$$= 4a\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h$$

$$= 2\,\pi\, a\, h^2.$$

எனவே கொள்ளளவு,

$$V = 2\pi\, a\, h^2.$$

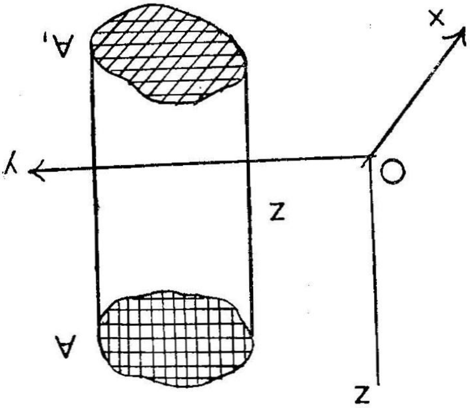
9-5. இரு மாறித் தொகையீடுகளில் கொள்ளளவு காணுதல்

$z = f(x, y)$ என்ற சார்பு குறிக்கும் பரப்பின் ஒரு பகுதி A என்க.

xoy தளத்தில் A-ன் வீச்சு A' எனக் கொள்வோம். A' ஐ பல்வேறு செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கவும். x, y ஆயங்களுக்கிணையாகக் கோடுகள் வரைந்து பிரிக்கப்படும் செவ்வகங்கள் ஒவ்வொன்றினது பரப்பும் $\Delta x\, \Delta y$ ஆகும். பரப்பு A-க்கும் பரப்பு A'-க்கும் உள்ள உயரம் z எனின், நமக்குக் கிடைக்கப் பெறும் திடப் பொருளின் கொள்ளளவு,

$$V = \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\text{எல்லை}} \sum\sum z\, \Delta x\, \Delta y$$

$$= \iint_{A'} z\, dx\, dy.$$

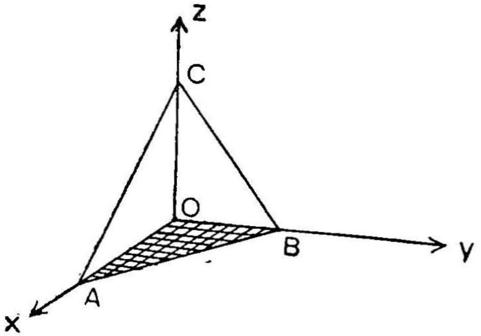


படம் 29

மாதிரி 1 :

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \quad x + y + z = 1$$

என்ற தளங்களால் அடைபடும் திடப்பொருளின் கொள்ளளவு காண்க.



படம் 30.

$$\text{கொள்ளளவு } V = \int\int_R (1-x-y)\, dy\, dx$$

படத்தில் R என்பது, பரப்பு OAB ஆகும். y-ன் எல்லைகள் 0 முதல் $(1-x)$ வரையிலும், x-ன் எல்லைகள் 0 முதல் 1 வரையிலுமாகும்.

$$\therefore \quad V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right)_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - x - x + x^2 - \frac{1-2x+x^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - 2x + x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(1-x)^3}{-3} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left[+ \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{6}.$$

எனவே, கொள்ளளவு $V = \dfrac{1}{6}$.

9-6. வளை பரப்பு காணுதல் (Area of a Curved Surface)

$z = f(x, y)$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்ட மேற்பரப்பின் பரப்பளவு (area of the surface)

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

என்ற சூத்திரத்திலும் கிடைக்கப்பெறும்.

$x = F(y, z)$ என்ற மேற்பரப்பின் பரப்பளவு

$$S = \iint\limits_{R'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz$$

சமன்பாடு $y = \phi\,(z, x)$ எனின், பரப்பளவு

$$S = \iint\limits_{R''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dy$$

ஆகும்.

மாதிரி 12 :

ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பைக் கணக்கிடுக.

கோளம் $x^3 + y^2 + z^2 = a^2$.

முதல் அரைக்கால் கோளத்தின் புறப்பரப்பைக் காண்போம்.

$$S = \iint\limits_{R} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$2z\,\frac{\partial z}{\partial x} = -\,2x \qquad \therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\,\frac{x}{z}.$$

இவ்வாறே $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\,\dfrac{y}{z}$.

$$\therefore \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}$$

$$= \frac{z^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{a^2}{z^2}.$$

$$\therefore\ S = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{z}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^a a \left(\sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \int_0^a a \sin^{-1} 1 \, dx$$

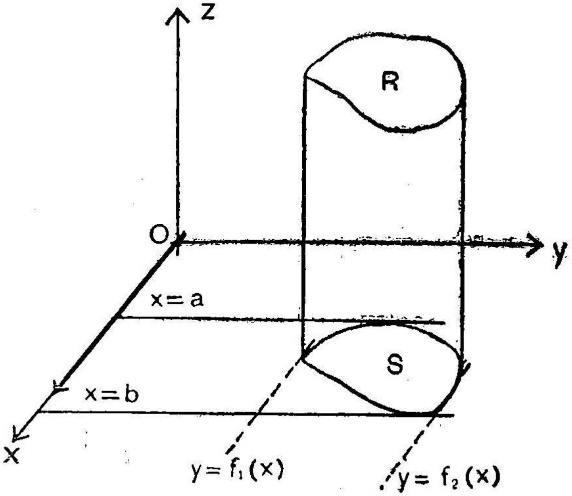
$$= a \int_0^a \frac{\pi}{2} \, dx$$

$$= a \frac{\pi}{2} (x)_0^a = \frac{\pi a^2}{2}$$

எனவே, முழு கோளத்தின் புறப்பரப்பு

$$= 8 \times \frac{\pi a^2}{2} = 4 \pi a^2.$$

9-7. மும்மடித் தொகை (Triple Intgeral)



படம் 31.

அரங்கம் R-ல் $f(x, y, z)$ ஒரு தொடர்ச்சியான ஒரு மதிப்புடைச் சார்பு எனக் கொள்வோம். xOy தளத்தில் R-ன் வீச்சு

(projection) S என்க. $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ என்ற வளைவுகளால் S அடைபட்டு உள்ளது என்போம்.

பின், $f(x, y, z)$ சார்பின் மும்மடி தொகை கீழே கண்டுள்ள வாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$I = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left(\int_{\phi_1(y,z)}^{\phi_2(y,z)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right\} dx$$

மாதிரி 13 :

பின் வருபனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\int_0^{1=} \int_0^{\sqrt{1-x^2}=} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\, dz\, dy\, dx$$

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\, dz \right) dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{xyz^2}{2} \right)_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy(1-x^2-y^2)}{2}\, dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy - x^3y - xy^3}{2}\, dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{x^3y^2}{2}-\frac{xy^4}{4}\right)_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{x^3(1-x)^2}{2} - \frac{x(2-x^2)^2}{4}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{4}[2x(1-x^2)-2x^3(1-x^2)-x(1-x^2)^2]\, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)[2-2x^2-1+x^2]\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)(1-x^2)\, dx$$

$$\equiv \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{48}.$$

மாதிரி 14 :

$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ என்ற தளங்களால் அடைபடும் R அரங்கில் $f(x, y, z = xyz$ என்ற சார்பின் தொகையைக் கணக்கிடுக.

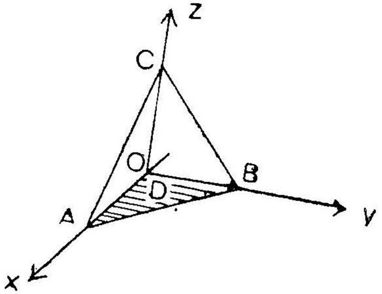
$$I = \iiint_R xy\, z\, dz\, dy\, dx$$

அரங்கு R ஒழுங்கானதாகும்.

z-ன் எல்லைகள் 0 முதல் $1-x-y$ வரை

y-ன் எல்லைகள் 0 முதல் $1-x$ வரை

x-ன் எல்லைகள் 0 முதல் 1 வரை, ஆகும்.



படம் 32.

$$\therefore \quad I = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} xyz\, dz \right) dy \right\} dx$$

$$= \int_0^0 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\frac{xy\, z^2}{2} \right)_0^{1-x-y} dy \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \frac{xy\,(1-x-y)^2}{2} dy \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{xy^3}{3} - \frac{x^2 y^3}{3} - \frac{xy^4}{4} \right\}_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{12} \left(4x\,(1-x)^3 - 4x^2\,(1-x)^3 - 3x(1-x)^4\right) dx$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^3 [4 - 4x - 3(1-x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^3 (1-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4\, dx$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5)\, dx$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^4}{4} \quad \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \right]$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{15 - 40 + 45 - 24 + 5}{30} \right]$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{1}{30} \right] = \frac{1}{720}.$$

பயிற்சி 9·2

(1) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ என்ற வளைவின் பரப்பளவைக் காண்க.

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைவின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக.

(3) $y^2 = 4x,\quad y = 3x - 1$ என்ற வளைவுகளால் அடைபடும் பரப்பளவு காண்க.

(4) $y^2 = 4a(x + a)$, $y^2 = 4b(b - x)$ என்ற பரவளைவுகளுக்குப் பொதுவான பரப்பளவைக் காண்க.

(5) $y^2 = 2x$, $2y = x^2$ என்ற பரவளைவுகளுக்குப் பொதுவான பரப்பின் புவிஈர்ப்பு மையம் காண்க.

(6) $x^2 = 4y$, $y = x$ என்ற வளைவுகளால் அடைபடும் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் காண்க.

(7) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ என்ற வளைவு, $x = 0$, $y = 0$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் பரப்பின் புவிஈர்ப்பு மையம் காண்க.

(8) $y^2 = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$ என்ற வளைவுகளால் அடைபடும் ஒரு பரப்பின் y ஆயத்தைப் பற்றிய சடத்துவ திருப்புத் திறன் காண்க.

(9) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ என்ற தளங்களால் அடைபடும் திடப் பொருளின் கொள்ளளவு (volume) காண்க.

(10) $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$, $z = 12 + y - x^2$ இவற்ருல் அடைபடும் திடப் பொருளின் கொள்ளளவு காண்க.

(11) $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$ என்ற இரு உருளைகளுக்குப் பொதுவான திடப்பொருளின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

(12) $z = 0, z = 2x$ என்ற இரு தளங்களுக்கிடையேயுள்ள $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற உருளையின் புறப்பரப்பளவைக் காண்க.

(13) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 18$ என்ற வட்டப் பரப்பினது y ஆயத்தைப் பற்றிய சடத்துவ திருப்புத் திறன் காண்க.

(14) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \int_0^y xyz\, dz\, dy\, dx$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(15) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x + y + z = 1$ என்ற தளங்களால் அடைபட்டுள்ள அரங்கத்தில் $\iiint (x+y+z)^{-3}\, dx\, dy\, dz$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

விடைகள்

(1) $\frac{3}{8}\pi ab$ (2) πab

(3) $\frac{9}{64}$ (4) $\frac{8}{3}(a+b)\sqrt{ab}$

(5) $\left(\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right)$ (6) $\left(2, \frac{8}{5}\right)$

(7) $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$ (9) $\frac{abc}{6}$

(10) $\frac{549}{140}$ (11) 64

(12) $4a^2$ (13) 243π

(14) $\frac{4}{3}$.

10. இலாப்லசின் மாற்றம்

(The Laplace Transform)

10-1. வரையறை

$f(t)$ எனும் சார்பு t-ன் அனைத்து நேர் மதிப்புகளுக்கும் வரையறுக்கப்பட்டிருந்து $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ என்பது $F(s)$-க்குச் சமமெனின், $F(s)$ என்ற மதிப்பு $f(t)$-ன் இலாப்லசின் மாற்று எனப்படும். அதை நாம் $L[f(t)]$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

எனவே, $$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= F(s)$$

மேலும், $f(t)$ஐ $F(s)$ ஆக மாற்றும் இயக்கி, இலாப்லசின் இயக்கி (The Laplace transform operator) எனப்படும்.

10-2. சில முடிவுகள்

இலாப்லசின் மாற்று வரையறையிலிருந்து கீழ்க்காணும் சில முடிவுகளை எளிதில் நிறுவலாம்.

(i) $L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)]$

(ii) $L[cf(t)] = c \, . \, L[f(t)]$

(iii) $L[f'(t)] = s\, L[f(t)] - f(0)$

(iv) $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}, \quad s - a > 0$

(v) $L[e^{-at}] = \dfrac{1}{s+a}, \quad s+a>0$

(vi) $L[\sinh at] = \dfrac{a}{s^2-a^2}$

(vii) $L[\cosh at] = \dfrac{s}{s^2-a^2}$.

நிரூபணம் :

(i) $L[f(t)+g(t)]$

$$= \int_0^\infty e^{-st}[f(t)+g(t)]\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$= L[f(t)] + L[g(t)]$$

(ii) $L[cf(t)] = \int_0^\infty e^{-st} c f(t)\,dt$

$$= c\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = c\,L[f(t)].$$

(iii) $L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$

$$= \Big[f(t)\,e^{-st}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)\,e^{-st}\,dt$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= s\,L[f(t)] - f(0)$$

(iv) $L[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{-at}\, dt$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s-a},\ s - a > 0.$$

(v) $L[e^{-at}] = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{-at}\, dt$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s+a},\ s + a > 0.$$

(vi) $L[\sinh at] = L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2} L[e^{at}] - \frac{1}{2} L[e^{-at}]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

(vii) $L[\cosh at] = L\left[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2} L[e^{at}] + \frac{1}{2} L[e^{-at}]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+a} = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

மாதிரி 1 :

sinh $3t$-ன் இலாப்லசு மாற்றம் காண்க.

$$L[\sinh 3t] = L\left[\frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} L[e^{3t}] - \frac{1}{2} L[e^{-3t}]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+3-s+3}{s^2-9}\right]$$

$$= \frac{3}{s^2-9}.$$

பிரிதொரு முறை

$$L[\sinh a t] = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

$$\therefore \quad L[\sinh 3t] = \frac{3}{s^2 - 3^2} = \frac{3}{s^2 - 9}.$$

10-3. தேற்றம்

$$L[\sin a t] = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

நிரூபணம் :

$$L[\sin a t] = \int_0^\infty e^{-st} \sin a t \, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2}(-s \sin a t - a \cos a t\right]_0^\infty$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}$$

10-4. தேற்றம்

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

நிருபணம் :

$$L[\cos at] = \int_0^\infty e^{-st} \cos a\,t\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} [-s \cos a\,t + a \sin a\,t] \right]_0^\infty$$

$$= \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

10-5. தேற்றம்

n ஒரு நேர் முழு எண் எனின்,

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^n + 1}.$$

நிருபணம் :

$$L[t^n] = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u} \frac{du}{s}, \qquad u = st, \quad du = s\,dt$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} \, du$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n \, d(-e^{-u})$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}}\, n \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}}\, n\,(n-1) \int_0^\infty u^{n-2}\; e^{-u}\, du$$

$$= \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}}\, n\,(n-1)(n-2) \dots\dots 2.1. \int_0^\infty e^{-u}\, du$$

$$= \frac{n\,!}{s^{n+1}}\, \left[-e^{-u}\right]_0^\infty = \frac{n\,!}{s^{n+1}} \cdot 1$$

$$= \frac{n\,!}{s^{n+1}}.$$

எனவே, $L\,[t^n] = \dfrac{n\,!}{s^{n+1}}.$

குறிப்பு :

$$L\,[1] = L\,[t^0] = \frac{1}{s}$$

$$L\,[t] = L\,[t^1] = \frac{1}{s^2}$$

$$L\,[t^2] = \frac{2\,!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3},$$ முதலியன.

மாதிரி 2 :

$L\,[\,t^3 - 3t^2 + 1\,]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L\,[t^3 - 3t^2 + 1\,] = L\,[\,t^3\,] - 3\,L\,[\,t^2\,] + L[1]$$

$$= \frac{3\,!}{s^4} - 3 \cdot \frac{2\,!}{s^3} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{6}{s^4} - \frac{6}{s^3} + \frac{1}{s}.$$

மாதிரி 3 :

$L[\cos^2 3t]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L[\cos^2 3t] = L\left[\frac{1+\cos 6t}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} L[1] + \frac{1}{2} L[\cos 6t]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+36}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+36}\right]$$

$$= \frac{s^2+18}{s(s^2+36)}.$$

மாதிரி 4 :

$L[\cos^3 2t]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\therefore \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\therefore 4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta$$

$$\therefore \cos^3\theta = \frac{1}{4}[\cos 3\theta + 3\cos\theta]$$

அதாவது, $\cos^3 2t = \frac{1}{4}[\cos 6t + 3\cos 2t]$.

$$\therefore L[\cos^3 2t] = \frac{1}{4} L[\cos 6t] + \frac{3}{4} L[\cos 2t]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s^2+36} + \frac{3}{4}\cdot\frac{s}{s^2+4}$$

$$= \frac{s}{4}\left[\frac{1}{s^2+36} + \frac{3}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{s}{4}\left[\frac{s^2+4+3s^2+108}{(s^2+36)(s^2+4)}\right]$$

$$= \frac{s[s^2+28]}{(s^2+36)(s^2+4)}.$$

மாதிரி 5 :

$L(\sin t \cos 2t)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\sin t \,.\, \cos 2t = \frac{1}{2}(2 \sin t \cos 2t)$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 3t - \sin t]$$

$$\therefore \quad L[\sin t \cos 2t] = \frac{1}{2} L[\sin 3t] - \frac{1}{2} L[\sin t]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3s^2+3-s^2-9}{(s^2+9)(s^2+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2s^2-6}{(s^2+9)(s^2+1)}\right]$$

$$= \frac{s^2-3}{(s^2+9)(s^2-1)}.$$

மாதிரி 6 :

$L[\cos t \,.\, \cos 2t]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\cos t \,.\, \cos 2t = \frac{1}{2}[2 \cos t \,.\, \cos 2t]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 3t + \cos t]$$

$$\therefore \quad L[\cos t \,.\, \cos 2t] = \frac{1}{2} L[\cos 3t] + \frac{1}{2} L[\cos t]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{1}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{s^2+1+s^2+9}{(s^2+9)(s^2+1)}\right]$$

$$= \frac{s(s^2+5)}{(s^2+9)(s^2+1)}.$$

மாதிரி 7 :

$L[e^{-at} \cos b\,t]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L[e^{-at} \cos bt] = \int_0^\infty e^{-st} e^{-at} \cos b\,t\,d\,t$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t} \cos bt\,d\,t$$

$$= \left\{ \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)^2+b^2} [-(s+a) \cos b\,t + b \sin b\,t] \right\}_0^\infty$$

$$= \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}.$$

10-6. தேற்றம்

$L[f(t)] = F(s)$ எனின், $L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

நிரூபணம் :

$$L[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{\frac{-s}{a}y} f(y)\,dy \qquad \begin{array}{l} y = at \\ dy = a\,dt \end{array}$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

10-7. தேற்றம்

$$L[e^{-at} f(t)] = L[f(t)]_{s \to s+a}.$$

நிரூபணம் :

$$L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$L[e^{-at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-at}\, e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t} f(t)\,dt \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$= L[f(t)]_{s \to s+a}$$

[(1)-ம் (2)-ம் ஒரே மாதிரி அமைந்துள்ளன. அவற்றிற்குள்ள ஒரே வேறுபாடு s-க்குப் பதில் $(s+a)$ இருப்பதாகும்.]

$$\therefore \; L[e^{-at} f(t)] = L[f(t)]_{s \to s+a}.$$

மாதிரி 8 :

$L[\sin at]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L[\sin t] = F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore \; L[\sin at] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{a^2}+1}$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}.$$

மாதிரி 9 :

தேற்றம் 7-லிருந்து,

$$L[e^{-at} f(t)] = L[f(t)]_{s \to s+a}$$

எனவே,

(i) $L[e^{-at}] = L[1]_{s \to s+a}$

$$= \left[\frac{1}{s}\right]_{s \to s+a}$$

$$= \frac{1}{s+a}.$$

(ii) $L[e^{-at}\cos bt] = L[\cos bt]_{s \to s+a}$

$$= \left[\frac{s}{s^2+b^2}\right]_{s \to s+a}$$

$$= \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}.$$

(iii) $L[e^{at}\sin bt] = L[\sin bt]_{s \to s-a}$

$$= \left[\frac{b}{s^2+b^2}\right]_{s \to s-a}$$

$$= \frac{b}{(s-a)^2+b^3}$$

(iv) $L[e^{-at}t^n] = L[t^n]_{s \to s+a}$

$$= \left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]_{s \to s+a}$$

$$= \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

(v) $L[e^{at}t^n] = L[t^n]_{s \to s-a}$

$$= \left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]_{s \to s-a}$$

$$= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

10-8. தேற்றம்

$L[f(t)] = F(s)$ எனின்,

$$L[\,t f(t)\,] = -\frac{d}{ds} F(s).$$

நிரூபணம் :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} -\, t\, e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= -\int_0^{\infty} t\, e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= -L[\,t f(t)]$$

$$\therefore \quad L[\,t f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s).$$

கிளை :

$$L[\,t\ f(t)\,] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$\therefore \quad L[\,t^2 f(t)\,] = -\frac{d}{ds} L[t f(t)]$$

$$= -\frac{d}{ds}\left\{-\frac{d}{ds} L[f(t)]\right\}$$

$$= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} L[f(t)]$$

இவ்வாறே $L[t^3 f(t)] = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} L[f(t)]$

எனவே, $L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f(t)]$.

10-9. தேற்றம்

$L[f(t)] = F(s)$ எனவும், $t \to 0$ எனின், $\frac{f(t)}{t}$ -க்கு ஓ எல்லை உண்டு எனவும் கொள்வோம். பின்,

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

நிருபணம் :

$$F(s) = L[f(t)]$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\therefore \int_s^\infty F(s)\,ds = \int_s^\infty ds \int_0^\infty e^{-t} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) \left\{\int_s^\infty e^{-st}\,ds\right\} dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) \left[\frac{e^{-st}}{-t}\right]_s^\infty dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$= L\left[\frac{f(t)}{t}\right].$$

$$\therefore L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds.$$

மாதிரி 10 :

$t\,e^{-5t}$ என்ற சார்பின் இலாப்லசின் மாற்றம் காண்க.

$$L[t\,e^{-5t}] = -\frac{d}{ds} L[e^{-5t}]$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+5}\right]$$

$$= \frac{1}{(s+5)^2}$$

மாதிரி 11 :

$t \cos 2t$-ன் இலாப்லசின் மாற்றம் காண்க.

$$L[t \cos 2t] = -\frac{d}{ds} L[\cos 2t]$$

$$= -\frac{d}{ds}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$= -\frac{(s^2+4)\,.\,1 - s(2s)}{(s^2+4)^2}$$

$$= \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

மாதிரி 12 :

$L\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = \int_s^\infty \mathrm{L}(1-\cos t)\,ds$$

$$= \int_s^\infty [\,\mathrm{L}(1) - L(\cos t)\,]\,ds$$

$$= \int_s^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) ds$$

$$= \frac{1}{2} \log s^2 - \frac{1}{2} \log (s^2 + 1)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log \frac{s^2}{s^2 + 1} \right]_s^\infty$$

$$= - \frac{1}{2} \log \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{s^2 + 1}{s^2} .$$

மாதிரி 13:

$L \left[\frac{\sin at}{t} \right]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L \left[\frac{\sin at}{t} \right] = \int_s^\infty L [\sin a\, t]\, d s$$

$$= \int_s^\infty \frac{a}{s^2 + a^2}\, d s$$

$$= a \frac{1}{\infty} \tan^{-1} \frac{s}{a}$$

$$= \left[\tan^{-1} \frac{s}{a} \right]_s^\infty$$

$$= \tan^{-1} \infty - \tan^{-1} \frac{s}{a}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{a} .$$

பயிற்சி 10·1

கீழ்க்காணும் சார்புகளின் இலாப்லசின் மாற்றம் காண்க.

(1) $t^2 + 5t + 6$ (2) $at^2 + bt + c$

(3) $\cosh 3t$ (4) $\sin^2 2t$

(5) $\cos 2t \,.\, \cos 3t$ (6) $\sin t \,.\, \sin 2t \,.\, \sin 3t.$

(7) $e^{-3t} \sin 4t$ (8) $e^{-3t} \cos 5t$

(9) $t\, e^{-4t}$ (10) $t^2\, e^{2t}$

(11) $t \sin 2t$ (12) $t^2 \cos 2t$

(13) $t^2\, e^{-2t}$ (14) $t \sinh t$

(15) $t^2 \cosh 2t$ (16) $t\, e^{-t} \sin t$

(17) $\dfrac{\sin^2 t}{t}$ (18) $\dfrac{1 - e^t}{t}$

விடைகள்

(1) $\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{5}{s^2} + \dfrac{6}{s}$ (2) $\dfrac{2a}{s^3} + \dfrac{b}{s^2} + \dfrac{c}{s}$

(3) $\dfrac{s}{s^2 - 9}$ (4) $\dfrac{8}{s\,(s^2 + 16)}$

(5) $\dfrac{s\,(s^2 + 13)}{(s^2 + 25)\,(s^2 + 1)}$ (7) $\dfrac{4}{(s+3)^2 + 4^2}$

(8) $\dfrac{s + 3}{(s + 3)^2 + 5^2}$ (9) $\dfrac{1}{(s + 4)^2}$

(10) $\dfrac{2}{(s - 2)^3}$ (11) $\dfrac{4s}{(s^2 + 4)^2}$

(12) $\dfrac{2s\,(s^2 - 4)}{(s^2 + 4)^3}$ (13) $\dfrac{2}{(s + 2)^3}$

(14) $\dfrac{2s}{(s^2 - 1)^2}$ (15) $\dfrac{2s\,(s^2 + 2)}{(s^2 - 4)^3}$

(16) $\dfrac{2\,(s + 1)}{(s^2 + 2s + 2)^2}$ (17) $\log \dfrac{s - 1}{s}$

(18) $\dfrac{1}{4} \log \dfrac{s^2 + 4}{s^2}$.

10-10. நேர்மாறு மாற்றம் (Inverse transforms)

நாம் இதுவரை கண்ட இலாப்லசு மாற்றங்கள் கீழே தரப் பட்டுள்ளன.

வரிசை எண்	$f(t)$	$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
3.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
4.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
6.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
7.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
8.	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
9.	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
10.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
11.	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
12.	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
13.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
14.	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$

$L[f(t)] = F(s)$ எனின், $f(t) = L^{-1} [F(s)]$ என்று நேர்மாறு மாற்றம் வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு L^{-1} என்பது நேர்மாறு மாற்றத்தைக் குறிக்கும் குறியீடாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $L[1] = \frac{1}{s} \qquad \therefore \quad 1 = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right].$

(ii) $L[t] = \frac{1}{s^2} \qquad \therefore \quad t = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]$

(iii) $L[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 3^2}$

$$\therefore \quad \sin 3t = L^{-1}\left[\frac{3}{s^2 + 3^2}\right].$$

(iv) $L[t \cos at] = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

$$\therefore \quad t \cos at = L^{-1}\left[\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}\right].$$

10-11. நேர்மாறு மாற்றம் காணும் முறைகள்

இனி நமக்குத் தெரிந்த இலாப்லசு மாற்றங்களின் துணை கொண்டு சில சார்புகளின் நேர்மாறு மாற்றங்களைக் காண்போம்.

(a) $L[f(t)] = F(s)$ எனின்

$L[e^{-at} f(t)] = F(s + a).$

எனவே,

$$L^{-1}[F(s+a)] = e^{-at} f(t)$$
$$= e^{-at} L^{-1}[F(s)].$$

அதாவது $L^{-1}[F(s+a)] = e^{-at} L^{-1}[F(s)].$

மாதிரி 14 :

$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$L^{-1}[F(s+a)] = e^{-at} L^{-1} F(s)$ [பத்தி 11 (a)]

$$\therefore \quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = e^{-at} L^{-1} F\left(\frac{1}{s^2}\right)$$
$$= e^{-at}\, t \quad \text{[அட்டவணையின்படி].}$$

மாதிரி 15 :

$\frac{5}{s^2+10s+41}$ -ன் நேர்மாறு மாற்றம் காண்க,

$$\frac{5}{s^2+10s+41}=\frac{5}{(s+5)^2+16}=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{(s+5)^2+4^2}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+10s+41}\right]=L^{-1}\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{(s+5)^2+4^2}\right]$$

$$=\frac{5}{4}e^{-5t}\ L^{-1}\left[\frac{4}{s^2+4^2}\right]$$

$$=\frac{5}{4}e^{-5t}\ \sin 4t$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+10s+41}\right]=\frac{5}{4}e^{-5t}\sin 4t.$$

மாதிரி 16 :

$\frac{s-1}{s^2-2s+5}$-ன் நேர்மாறு மாற்றம் காண்க.

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5}=\frac{s-1}{(s-1)^2+4}=\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}.$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right]=L^{-1}\left[\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right]$$

$$=e^{t}\ L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]$$

$$=e^{t}\cos 2^{t}$$

எனவே, $L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right]=e^{t}\cos 2t.$

(b) $L[f(t)]=F(s)$ எனின்,

$$L[t\,f(t)]=-\frac{d}{ds}[F(s)]=-F'(s)$$

எனவே, $L^{-1}[F'(s)]=-t\,f(t)$

$$=-t\,L^{-1}[F'(s)]$$

மாதிரி 17 :

$\dfrac{1}{(s+a)^2}$ -ன் நேர்மாறு மாற்றம் காண்க.

$$L^{-1}[F'(s)] = -t\,L^{-1}[F(s)]$$

$$\therefore\quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = -t\,L^{-1}\left[\int\frac{1}{(s+a)^2}\,ds\right]$$

$$= -t\,L^{-1}\left[-\frac{1}{s+a}\right]$$

$$= -t\,L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]$$

$$= t\,e^{-at}.$$

$$\therefore\quad L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = t\,e^{-at}.$$

மாதிரி 18 :

$L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}\right]$ காண்க.

$$L^{-1}[F'(s)] = -t\,L^{-1}[F(s)].$$

$$\therefore\quad L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-a^2)^2}\right] = -t\,L^{-1}\left[\int\frac{s}{(s^2-a^2)^2}\,ds\right]$$

$$= -t\,L^{-1}\left[-\frac{1}{2(s^2-a^2)}\right]$$

$$= \frac{t}{2}\,L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right]$$

$$= \frac{t}{2}\,L^{-1}\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2-a^2}\right]$$

$$= \frac{t}{2a}\,L^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right]$$

$$= \frac{t}{2a}\sinh at$$

$$\therefore\quad L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-a^2)^2}\right] = \frac{t}{2a}\sinh at$$

மாதிரி 19 :

$\dfrac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$-ன் நேர்மாறு மாற்றம் காண்க.

$$L^{-1}[F^1(s)] = -t\,L^{-1}[F(s)]$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left[\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}\right] = -\,t\,L^{-1}\left[a\int\frac{2s}{(s^2+a^2)^2}\,ds\right]$$

$$= -t\,L^{-1}\left[a\left(-\left(-\frac{1}{(s^2+a^2)}\right)\right)\right]$$

$$= +\,t\,L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

$$= t\sin at$$

மாதிரி 20 :

$L^{-1}\left[\log\dfrac{1-s^2}{s^2}\right]$ காண்க.

$L[f(t)] = F(s)$ எனின் $L[tf(t) = -F'(s)$.

$f(t) = L^{-1}\left[\log\dfrac{1-s^2}{s^2}\right]$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad L[t\,f(t)] = -\frac{d}{ds}\left[\log\frac{1-s^2}{s^2}\right]$$

$$= -\frac{ds}{d}[\log(1-s^2)-\log s^2]$$

$$= -\left[\frac{1}{1-s^2}\cdot(-2s) - \frac{1}{s^2}2s\right]$$

$$= -2\left[\frac{s}{s^3-1} - \frac{1}{s}\right].$$

$$\therefore \quad t\,f(t) = -2\,L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1} - \frac{1}{s}\right]$$

$$= -2\left\{L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\right\}$$

$$= -2\,[\cosh t - 1]$$

$$= 2\,[1 - \cosh t].$$

$$\therefore \quad f(t) = \frac{2\,[1-\cosh t]}{t}$$

அதாவது,

$$L^{-1}\left[\log \frac{1-s^2}{s^2}\right] = \frac{2}{t}\,(1-\cosh t)$$

(c) $t = 0$-க்கு $L^{-1}[F(s)] = 0$ எனின்,

$$L^{-1}[s\,F(s)] = \frac{d}{dt}\,L^{-1}[F(s)].$$

இம் முடிவு சில நேர்மாறு மாற்றங்கள் காண உதவியாக விருக்கும்.

மாதிரி 21 :

$L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s+4)^2}\right]$ காண்க.

$$L^{-1}[s\,F(s)] = \frac{d}{dt}\,L^{-1}[F(s)]$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left[\frac{s}{(s+4)^2}\right] = \frac{d}{dt}\;L^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^2}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\;e^{-4t}\;L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \quad \text{[பத்தி 1.1 (a)]}$$

$$= \frac{d}{dt}\,[e^{-4t}\,t]$$

$$= e^{-4t} + t\,e^{-4t}(-4)$$

$$= e^{-4t}\,[1-4t]$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left[\frac{s}{(s+4)^2}\right] = e^{-4t}(1-4t.)$$

மாதிரி 22 :

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+8s+25}\right]$$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\frac{s}{s^2+8x+25}=\frac{s}{s^2+8s+16+9}=\frac{s}{(s+4)^2+3^2}$$

$$\therefore\quad L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+8s+25}\right]=L^{-1}\left[\frac{s}{(s+4)^2+3^2}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\ L^{-1}\left[\frac{1}{(s+4)^2+3^2)}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\ e^{-4t}\ L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3^2}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\ e^{-4t}\ \frac{1}{3}\ \sin 3t$$

$$=\frac{1}{3}\ [3\ e^{-4t}\cos 3t-4\sin 3t\ e^{-4t}]$$

$$=\frac{e^{-4t}}{3}\ [3\cos 3t-4\sin 3t]$$

(d) $L[f(t)]=F(s)$ எனின்,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\ F(s)\right]=\int_0^t L^{-1}[F(s)]\,dt.$$

இம் முக்கிய முடிவு சில நேர்மாறு மாற்றங்களைக் காணப் பெரிதும் உதவும்.

மாதிரி 23 :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+16)}\right]$$ -க் காண்க.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\ F(s)\right]=\int_0^t L^{-1}[F(s)]\,dt$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+16)}\right] = \int_0^t L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16}\right] dt$$

$$= \int_0^t \frac{\sin 4t}{4}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{-\cos 4t}{4}\right)_0^t$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-\cos 4t}{4} - \frac{-1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\,[\,1 - \cos 4t\,].$$

மாதிரி 24 :

$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+25)^2}\right]$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+25)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+5^2)^2}\right]$$

$$= \int_0^t L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+5^2)^2}\right] dt$$

$$= \int_0^t \frac{t\sin 5t}{2.5}\, dt$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^t t\sin 5t\, dt$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^t t\, d\left(-\frac{\cos 5t}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left[-\left(\frac{t\cos 5t}{5}\right)_0^t + \frac{1}{5}\int_0^t \cos 5t\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[-\frac{t\cos 5t}{5} + \frac{\sin 5t}{25}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{250}\,[\sin 5t - 5t\cos 5t].$$

(e) சில சார்புகளைப் பகுதி பின்னங்களாகப் பிரித்து நேர்மாறு மாற்றங்களைக் காணலாம்.

மாதிரி 25 :

$\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$-ன் நேர்மாறு மாற்றம் காண்க.

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}.$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right] = e^{-t} - e^{-2t}.$$

மாதிரி 26 :

$\dfrac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$-ன் நேர்மாறு மாற்றம் காண்க.

$$\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} = \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+9}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}\right] = \frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] - \frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\cos 2t - \frac{1}{5}\cos 3t$$

$$= \frac{1}{5}\,[\cos 2t - \cos 3t]$$

மாதிரி 27 :

$L^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s+1)^2}\right]$-ன் மதிப்பைக் காண்க

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$= 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

$$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^2}\right] = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

பயிற்சி 10.2

கீழ்க்காணும் சார்புகளின் இலாப்லசின் நேர்மாறு மாற்றங்களைக் காண்க.

(1) $\dfrac{s}{(s+2)^5}$

(2) $\dfrac{s}{(s-2)^2+9}$

(3) $\dfrac{s}{s^2(s^2+1)(s^2+9)}$

(4) $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

(5) $\dfrac{1}{s^4-16}$

(6) $\log\dfrac{s+4}{s-4}$

(7) $\log\dfrac{1+s}{s^2}$

(8) $\dfrac{s+1}{s(s+2)}$

(9) $\dfrac{3s+4}{(s+1)^2+2^2}$

(10) $\dfrac{s}{s^2+25}$

விடைகள்

(1) $\frac{t^3 e^{-2t}(2-t)}{12}$ (2) $e^{2t}\ [\cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t]$

(3) $\frac{1}{9}t - \frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{216}\ \sin 3t$

(4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}$ (5) $\frac{\sinh 2t - \sin 2t}{16}$

(6) $\frac{2\sinh 4t}{t}$ (7) $\frac{2}{t} - \frac{1}{t}\ e^{-t}$

(8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}$

(9) $\frac{3}{2}\ e^{-t}\ [2\cos 2t + \frac{1}{3}\ \sin 2t]$

(10) $\cos 5t$.

10-12. வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

இலாப்லசின் மாற்றத்தை பயன்படுத்திப் வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காணலாம். கீழ்க்காணும் மாதிரிகள் மூலம் தீர்வுகள் காணும் முறை எடுத்துக் காட்டப்பட்டுள்ளது.

மாதிரி 28 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\ \frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$y_2 - 5y_1 + 6y = e^{4x}$$

இருபக்கமும் இலாப்லசின் மாற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால்,

$$L[y_2] - 5L[y_1] + 6L[y] = L[e^{4x}]$$

$$\therefore \quad \{s^2\ L[y] - sy(0) - y_1(0)\}$$

$$- 5\ \{sL(y) - y(0)\} + 6\ L[y] = \frac{1}{s-4}.$$

$$\therefore \quad L[y]\{s^2-5s+6\}-(s-5)\,y(0)-y_1(0)=\frac{1}{s-4}$$

அதாவது,

$$L[y]=\{s^2-5s+6\}=(s-5)\,y(0)+y_1(0)+\frac{1}{s-4}$$

$$\therefore \quad L[y]=\frac{(s-5)\,y(0)}{s^2-5s+6}+\frac{y_1(0)}{s^2-5s+6}$$

$$+\frac{1}{(s-4)(s^2-5s+6)}$$

$$\therefore \quad y=L^{-1}\left[\frac{(s-5)\,y(0)}{s^2-5s+6}\right]+L^{-1}\left[\frac{y_1(0)}{s^2-5s+6}\right]$$

$$+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)(s^2-5s+6)}\right]$$

$$=y(0)\,L^{-1}\left[\frac{s-5}{s^2-5s+6}\right]+y_1(0)\,L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-5s+6}\right]$$

$$+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)(s^2-5s+6)}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{s-5}{s^2-5s+6}\right]=L^{-1}\left[\frac{3}{s-2}-\frac{2}{s-3}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{3}{s-2}\right]-L^{-1}\left[\frac{2}{s-3}\right]$$

$$=3\,L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-2\,L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$

$$=3\,.\,e^{2x}-2\,e^{3x}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-5x+6}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-2}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$=e^{3x}-e^{2x}.$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)(s^2-5s+6)}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}$$

$$\therefore\ y = y(0)\,[3e^{2x}-2e^{3x}] + y_1(0)\,[e^{3x}-e^{2x}] + \frac{1}{2}e^{2x} - e^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}$$

$$= e^{2x}\left[3y(0)-y_1(0)+\frac{1}{2}\right] + e^{3x}[-2y(0)+y_1(0)-1] + \frac{1}{2}e^{4x}$$

$$A = 3y(0)-y_1(0)+\frac{1}{2}$$

$B = -2y(0)+y_1(0)-1$, எனின்,

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}.$$

மாதிரி 29 :

$x=0,\ y=0,\ \dfrac{dy}{dx}=0$ எனின்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin 3x$$

என்ற வகைக் கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வகைக் கெழு சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$y_2 + 4y = \sin 3x$$

இரு பக்கமும் இலாப்லசின் மாற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$L[y_2] + 4L[y] = L[\sin 3x].$$

$$\therefore \quad \{s^2 L[y] - s\,y(0) - y_1(0)\} + 4L[y] = \frac{3}{s^2 + 3^2}$$

அதாவது, $L[y](s^2 + 4) - sy(0) - y_1(0) = \dfrac{3}{s^2 + 3^2}$

$$\therefore \quad L[y](s^2 + 4) = s\,y(0) + y_1(0) + \frac{3}{s^2 + 3^2}$$

$\because \quad y_1(0) = 0, \quad y(0) = 0,$

$$L[y](s^2 + 4) = \frac{3}{s^2 + 3^2}$$

$$\therefore \quad L[y] = \frac{3}{(s^2 + 2^2)(s^2 + 3^2)}$$

அதாவது, $y = L^{-1}\left[\dfrac{3}{(s^2 + 2^2)(s^2 + 3^2)}\right]$

$$= 3L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + 2^2)(s^2 + 3^2)}\right]$$

$$= 3L^{-1}\left[\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s^2 + 2^2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s^2 + 3^2}\right]$$

$$= \frac{3}{5} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 2^2}\right] - \frac{3}{5} L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 3^2}\right)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$\therefore \quad y = \frac{3}{10} \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x.$$

மாதிரி 30 :

$x = 0$ ஆக இருக்கும்போது

$y = 2, \quad y_1 = 3$ எனின்,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$y_2 - 3y_1 + 2y = 4$$

$$\therefore \quad L[y_2] - 3L[y_1] + 2L[y] = L[4]$$

$$\therefore \quad \{s^2 L[y] - s\,y(0) - y_1(0)\}$$
$$- 3\{s L[y] - y[0]\} + 2L[y] = 4\frac{1}{s}$$

எனவே,

$$L[y](s^2 - 3s + 2) - (s-3)\,y(0) - y_1(0) = \frac{4}{s}$$

$$\because \quad L[y] = \bar{y}, \quad y(0) = 2, \quad y_1(0) = 3,$$

$$\bar{y}(s^2 - 3s + 2) - 2(s-3) - 3 = \frac{4}{s}$$

$$\therefore \quad \bar{y}(s^2 - 3s + 2) = 2(s-3) + 3 + \frac{4}{s}$$
$$= 2s - 3 + \frac{4}{s}$$

எனவே,

$$\bar{y} = \frac{2s}{s^2-3s+2} - \frac{3}{s^2-3s+2} + 4\,\frac{1}{s(s^2-3s+2)}$$

$$\therefore \quad y = 2L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-3s+2}\right] - 3L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3s+2}\right]$$
$$+ 4L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-3s+2)}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-3s+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right]$$
$$= 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$
$$= 2e^{2x} - e^{x}.$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-3s+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$= e^{2x} - e^{x}.$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2-3s+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{2} L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 - e^{x} + \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$\therefore \quad y = 2\,[2e^{2x} - e^{x}] - 3\,[e^{2x} - e^{x}] + 4\left[\frac{1}{2} - e^{x} + \frac{1}{2} e^{2x}\right]$$

$$= 4e^{2x} - 2e^{x} - 3e^{2x} + 3e^{x} + 2 - 4e^{x} + 2e^{2x}$$

$$= 3e^{2x} - 3e^{x} + 2.$$

எனவே $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4$

என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$y = 3e^{2x} - 3e^{x} + 2.$$

பயிற்சி 10·3

(1) $x = 0$ என்ற மதிப்புக்கு $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ எனின், $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \cos 2x$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

(2) தீர்வு காண்க: $\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = e^{-3x} + \cos 4x.$

(3) தீர்க்கவும்: $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=e^{-2x}+\sin 4x.$

(4) தீர்க்க: $\frac{d^2y}{dx^2}-y=2+5x.$

(5) $x=0$-க்கு $y=1$, $\frac{dy}{dx}=2$ எனின்,

$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

(6) $x=0$-க்கு $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ எனின்,

$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=x^3$-ன் தீர்வு காண்க.

(7) $x=0$-க்கு $y=0$, $\frac{dy}{dx}=0$ எனின்,

$\frac{d^2y}{dx^2}+y=a\cos pt$-ன் தீர்வு காண்க.

(8) $x=0$-க்கு $y=0$, $y_1=-1$ எனின்,

$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+13y=2e^{-x}$-ன் தீர்வு காண்க.

(9) தீர்க்க: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=3\sin x.$

(10) $t=0$-க்கு $x=-1$ எனின், $\frac{dx}{dt}-x=e^{at}$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

விடைகள்

(1) $y=-\frac{5}{9}\sin x+\frac{4}{9}\sin 2x-\frac{1}{9}\cos 2x.$

(2) $y=A\cos 4x+B\sin 4x+\frac{1}{25}e^{-3x}+\frac{x}{8}\sin 4x.$

(3) $y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + xe^{-2x} - \frac{1}{50}$ $(\sin 4x +$ $2 \cos 4x)$.

(4) $y = Ae^{x} + Be^{-x} - 2 - 5x$.

(5) $y = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$.

(6) $y = 3e_{x} - \frac{1}{3}x^{3} - x^{2} - 2x - 3$.

(8) $y = \frac{1}{5} e^{-x} - \frac{1}{5} e^{-2x} (\cos 3x + \sin 3x)$

(10) $x = \frac{1}{1 - a} (e^{at} - ae^{t})$.

11. பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள்

(Partial Differential Equations)

11–1. ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் கொண்ட சமன்பாடு பகுதி வகைக் கெழு சமன்பாடு எனப்படும். எனவே, இச் சமன்பாடு குறைந்தது இரு சார்பிலா மாறிகளில் (Independent variables) அமைந்திருக்கும். நாம் இந்த அத்தியாயத்தில் z எனும் ஒரு சார்புடைய (Dependent variable) x, y என்ற இரு சார்பிலா மாறிகளிலும் அமைந்த பகுதி வகைக் கெழு சமன்பாடுகளைக் காண்போம்.

11–2. குறியீடுகள்

பின்வரும் குறியீடுகள் (Notations) இந்த அத்தியாயத்தில் மேற்கொள்ளப்படும்.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = Dz \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = DD'z$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = D'z \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D'^2 z.$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = D^2 z$$

11–3. பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் அமைத்தல்

பின்வரும் இரு வழிகளில் பகுதி வகைக் கெழு சமன்பாடுகள் காணலாம்.

(i) x, y, z மாறிகள் கொண்ட ஒரு தொடர்பிலிருந்து யாதாவதொரு நிலை எண்களை (Arbitrary constants) நீக்குதல்.

(ii) x, y, z மாறிகளிலிருந்து ஏதாவதொரு சார்புகளை (Arbitrary functions) நீக்குதல்.

11-4. யாதாவதொரு நிலை எண்களை நீக்குதல் (By elimination of arbitrary constants).

z என்ற சார்புடைய மாறியும், x, y என்ற சார்பிலா மாறிகளுடன் கொண்ட ஒரு தொடர்பு

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம். இங்கு a, b என்பவை யாதாவதொரு நிலைத்த எண்களாகும்.

சமன்பாடு (1)-லிருந்து a, b ஐ நீக்க நமக்கு மேலுமிரு சமன்பாடுகள் தேவைப்படும். எனவே, சமன்பாடு (1) ஐ x, y ஐக் குறித்துத் தனித்தனியே பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

அதாவது, $$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

அதாவது, $$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

சமன்பாடுகள் (1), (2) (3)-லிருந்து a, b ஐ நீக்க,

$$\phi(x, y, z, p, q) = 0$$

என்ற பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு கிடைக்கப் பெறும். இச்சமன்பாட்டின் வரிசை (order) ஒன்றாகும்.

மாதிரி 1:

$$z = lx + l^2y^2 + m$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து l, m-ஐ நீக்குக.

$$z = lx + l^2y^2 + m \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1)ஐ x, yஐக் குறித்துத் தனித்தனியே பகுதி வகையிட,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = l \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2l^2 y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து, $l^2 = p^2$.

சமன்பாடு (3)-லிருந்து, $l^2 = \frac{q}{2y}$

$$\therefore \quad p^2 = \frac{q}{2y}$$

அதாவது $q = 2p^2 y$.

மாதிரி 2 :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து α, βஐ நீக்கிப் பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு அமைக்கவும்.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \ldots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1)ஐ x, y ஐக்குறித்து தனித்தனியே பகுதி வகையிட

$$2(x - \alpha) + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

அதாவது $x - \alpha + zp = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$$2(y - \beta) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

அதாவது $y - \beta + zq = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)-லிருந்து α, βஐ நீக்க, பகுதிவகைக் கெழு சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும்.

சமன்பாடு (2)-லிருந்து, $x - d = -zp$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து, $y - \beta = -zq$

இதைச் சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிடின்,

$$z^2p^2 + z^2q^2 + z^2 = (x + zp)^2 + (y + zq)^2$$
$$= x^2+y^2+z^2p^2+z^2q^2+2z(xp+yq)$$

$$\therefore \quad z^2 = x^2 + y^2 + 2z\,(xp + yq).$$

11-5. யாதவதொரு சார்புகளை நீக்குதல் (By the elimination of Arbitrary functions)

u, v என்பவை x, y, z என்ற மாறிகளைச் சார்ந்த இரு சார்புகள் எனவும், u, v சார்புகளுக்குள் உள்ள தொடர்பு

$$F(u, v) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனவும் கொள்வோம்.

சமன்பாடு (1) ஐ x, y ஐக் குறித்துத் தனித்தனியே பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

அதாவது,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\,p\right) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

அதாவது,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + p\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கப் பெறும்,

சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} = -\,\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\,q}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\,p}$$

சமன்பாடு (3) லிருந்து

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}p}{\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}p}$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial z}p}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}p} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}q}{\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}q}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p\right) \quad \ldots \quad \ldots (4)$$

சமன்பாடு (4) ஐ,

$$P_p + Q_q = R \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots (5)$$

என்ற வடிவில் எழுதலாம்.

இங்கு, $P = \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$R = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

சமன்பாடு (5) இலகுரான்சின் சமன்பாடு (Lagrange's equation) எனப்படும்.

மாதிரி 3 :

$ax + by + cz = f(x^2 + y^2 + z^2)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு அமைக்கவும்.

$$ax + by + cz = f(x^2 + y^2 + z^2) \quad \ldots \quad \ldots (1)$$

சமன்பாடு (1) ஐ x, y ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையிட,

$$a + cp = f'(x^2 + y^2 + z^2)(2x + 2zp) \quad \ldots \quad (2)$$

$$b + cq = f'(x^2 + y^2 + z^2)(2y + 2zq) \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$\frac{a + cp}{2x + 2zp} = f'(x^2 + y^2 + z^2)$$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து,

$$\frac{b + cq}{2y + 2zq} = f'(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$\therefore \quad \frac{a + cp}{2x + 2zp} = \frac{b + cq}{2y + 2zq}$$

$$(a + cp)(y + zq) = (b + cq)(x + zp)$$

$$(a + cp)\,y + azq + cp\,zq = (b + cq)\,x + bpz + pc\,qz.$$

$$\therefore \quad z\,(aq - bp) = (b + cq)\,x - (a + cp)\,y.$$

மாதிரி 4 :

$\phi(x + y + z) = xyz$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு அமைக்கவும்.

$$\phi(x + y + z) = xyz \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1)ஐ x, yஐக் குறித்து பகுதி வகையிட,

$$\phi'(x + y + z)(1 + p) = yz + xyp \quad \ldots \quad (2)$$

$$\phi'(x + y + z)(1 + q) = zx + xyq \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$\phi'(x + y + z) = \frac{yz + xyp}{1 + p}$$

சமன்பாடு (3)லிருந்து,

$$\phi'(x + y + z) = \frac{xz + xyq}{1 + q}$$

$$\therefore \quad \frac{y(z + xp)}{1 + p} = \frac{x(z + yq)}{1 + q}$$

$$\therefore \quad (1 + p)\,x\,(z + yq) = (1 + q)\,y\,(z + xp)$$

$$p\,(xz - xy) + q\,(xy - yz) = yz - xz$$

அதாவது $x(z - y)\,p + y\,(x - z)\,q = z\,(y - x).$

பயிற்சி 11.1

பின் வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் மாறிலிகளை நீக்கிப் பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் காண்க.

(1) $z = \alpha x + \beta y + \alpha\beta$

(2) $z = \alpha x + \beta y + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

(3) $z = xy + ax + by + ab$

(4) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = K^2$

(5) $\alpha^2 x + y = \alpha z + \beta$

(6) $z = x^2 y^2 + dx^2 + \beta y^2 + \alpha\beta$.

(7) $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} + \dfrac{z^2}{\gamma^2} = 1$.

பின் வரும் சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் சார்பு ϕ ஐ நீக்கிப் பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகள் காண்க.

(8) $\alpha x + \beta y + \gamma z = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$

(9) $z = x\,\phi_1(y) + y\,\phi_2(x)$

(10) $\phi(x + y + z,\ x^2 + y^2 - z^2) = 0$

(11) $y = \phi_1(y) + \phi_2(z)$

(12) $z = \phi_1(x + \alpha y) + \phi_2(x - \alpha y)$

(13) $z = y^2 + 2\phi\left(\dfrac{1}{x} + \log y\right)$

(14) $z = \phi_1(x - y)\,\phi_2(x + y)$.

விடைகள்

(1) $z = px + qy + pq$.

(2) $z = px + qy + \sqrt{p^2 + q^2}$.

(3) $z = pq$.

(4) $z^2(p^2 + q^2 + 1) = K^2$.

(5) $pq = 1$.

(6) $pq - 4xyz = 0.$

(7) $z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + yz\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

(8) $(\beta + \gamma q)x = (\alpha + \gamma p)y + (\alpha q + \beta p)z,$

(9) $z + xys = xp + yq$

(10) $(y + z)p - (z + x)q = x - y.$

(11) $ps = qr.$

(12) $r = \alpha^2 t.$

(13) $px^2 + qy = 2y^2.$

(14) $z(r - t) = p^2 - q^2.$

11-6. பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் பல்வேறு தீர்வுகள் (Different Integrals of *p. d. e.*)

முழுத் தீர்வுகளும் சிறப்புத் தீர்வுகளும் :

பத்தி 4-ல்,

$F(x, y, z, a, b) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$\phi(x, y, z, p, q) = 0$ என்ற பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு கண்டோம்.

இப்பொழுது. $F(x, y, z, a, b) = 0$ ... ... (1)

என்ற சமன்பாடு,

$\phi(x, y, z, p, q) = 0$ ... ... (2)

என்ற சமன்பாட்டின் வழி வந்த சமன்பாடு (Derived equation) எனக் கொள்வோம்.

பின், சமன்பாடு (1), சமன்பாடு (2)-ன் முழுத் தீர்வு (Complete Integral) எனப்படும். இத் தீர்வில் சார்பற்ற மாறிகளது எண்ணிக்கையும் யாதாவதொரு நிலை எண்களது எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்கும்.

முழுத் தீர்விலுள்ள a, b என்ற மாறிகளும் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் கொடுப்பதன் மூலம் கிடைக்கப்பெறும் தீர்வு சிறப்புத் தீர்வு (Particular Integral) எனப்படும்.

ஒருமைத் தீர்வுகளும் பொதுவான தீர்வுகளும்

$$\phi(x, y, z\ p, q) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு,

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்,

சமன்பாடு (2) ஐ a, b ஐக் குறித்து தனித்தனியே பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கப்பெறும்.

சமன்பாடுகள் (2), (3), (4)-லிருந்து a, b ஐ நீக்கக் கிடைக்கப்பெறுவது ஒருமைத் தீர்வு (Singular Integral) எனப்படும்.

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற சமன்பாட்டில் a, b என்ற மாறிலிகளில் ஒன்று மற்றதன் யாதாவதொரு சார்பெனின்,

$$F(x, y, z, a, f(a)) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

சமன்பாடு (2) ஐ a ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} f'(a) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

சமன்பாடுகள் (5), (6)-லிருந்து a ஐ நீக்கக் கிடைக்கப்பெறுவது பொதுத் தீர்வு (General Integral) எனப்படும்.

11-7 பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் சில நியம வகைகளைத் தீர்க்கத் தனி முறைகள்

வகை 1 :

$\phi(p, q) = 0$ என்ற வடிவிலுள்ள பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்.

முழுத்தீர்வு

$$\phi(p, q) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு

$$z = ax + by + C = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இங்கு $\phi(a, b) = 0$ ... ... (3)

சமன்பாடு (2) ஐ x, y ஐக் குறித்து பகுதி வகையிடின்,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = a$$

$\phi(p, q) = 0$ ஆதலின் $\phi(a, b) = 0$.

$\phi(a, b) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து b ஐ a-ன் தொடர்பாக எழுதக் கூடும்.

அதாவது, $b = f(a)$.

$\therefore$ முழுத் தீர்வு $z = ax + f(a)y + C$ ... ... (4)

ஒருமைத் தீர்வு

முழுத் தீர்வை a, C ஐக் குறித்து தனித்தனியே பகுதி வகையிட்டுக் கிடைக்கப் பெறும் சமன்பாடுகளின் உதவியால் முழுத் தீர்விலிருந்து a, C ஐ நீக்க ஒருமைத் தீர்வு கிடைக்கப் பெறும்.

$$z = ax + f(a)y + C$$

இதை a, C ஐக் குறித்து பகுதி வகையிட

$$0 = x + f'(a)y$$

$$0 = 1$$

இவ்விரு சமன்பாடுகள் பொருத்தமற்றது. எனவே இவ் வகை சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைத் தீர்வு கிடையாது. அதாவது, $\phi(p, q) = 0$ வடிவிலுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைத்தீர்வு (Singular Integral) கிடையாது.

பொதுத்தீர்வு :

முழுத் தீர்வு $z = ax + f(a)y + C$.

$C = F(a)$ எனக் கொள்வோம்,

$\therefore \quad z = ax + f(a)y + F(a)$ ... ... (5)

சமன்பாடு (5)ஐ aஐக் குறித்துப் பகுதிவகையிட,

$$0 = x + f'(a)\,y + F'(a) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (6)$$

சமன்பாடுகள் (5), (6)-லிருந்து a ஐ நீக்கின் கிடைக்கப்பெறுவது பொதுத்தீர்வு (General Integral) ஆகும்.

மாதிரி 5 :

தீர்க்க : $p^2 + q^2 = l^2$.

$$p^2 + q^2 = l^2$$

இது $\phi\,(p, q) = 0$ என்ற வடிவிலுள்ளது.

எனவே இதன் முழுத்தீர்வு,

$$z = ax + by + C.$$

இங்கு $\phi\,(a, b) = 0$ ஆதலின்

$$a^2 + b^2 = l^2$$

அதாவது $b = \sqrt{a^2 - l^2}$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$z = ax + \sqrt{l^2 - a^2}\,y + C. \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

மேலும் $C = F(a)$ என்க.

$$\therefore \quad z = ax + \sqrt{l^2 - a^2}\,y + F(a) \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2)ஐ aஐக்குறித்து பகுதி வகையிட

$$0 = x + \frac{1}{2\sqrt{l^2 - a^2}}\,(-2a) + F'(a) \qquad \ldots \qquad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3)-லிருந்து aஐ நீக்கப் பொதுத்தீர்வு கிடைக்கப்பெறும்.

இவ்வகைச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒருமைத்தீர்வு கிடையாது. (பத்தி 7. வகை 1)

மாதிரி 6 :

தீர்க்க : $p^2 + q^2 = mpq$

$$p^2 + q^2 = mpq$$

இது $\phi\,(p, q) = 0$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

∴ இதன் முழுத் தீர்வு,

$$z = ax + by + C.$$

$\phi(a, b) = 0$ ஆதலின்,

$$a^2 + b^2 = mab$$

(அதாவது) $b^2 - mab + a^2 = 0$

$$\therefore \quad b = \frac{ma \pm \sqrt{m^2a^2 - 4a^2}}{2}$$

$$= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\, a$$

எனவே இதன் முழுத்தீர்வு,

$$z = ax + \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\, ay + c \quad \ldots \quad (1)$$

பொதுத் தீர்வு காண $C = F(a)$ என்க.

$$\therefore \quad z = ax + \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\, ay + F(a) \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2) ஐ a ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையிட

$$0 = x + \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}\, y + F'(a) \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3)-லிருந்து a ஐ நீக்கக் கிடைக்கப்பெறுவது பொதுத் தீர்வாகும்.

இச் சமன்பாட்டிற்கு ஒருமைத் தீர்வு (Singular Integral) கிடையாது.

மாதிரி 7:

$z^2 = x^2p^2 + y^2q^2$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

$$z^2 = x^2p^2 + y^2q^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

அதாவது $\left(\frac{xp}{z}\right)^2 + \left(\frac{yq}{z}\right)^2 = 1.$

$x = e^{X}, \quad y = e^{Y}, \quad z = e^{Z}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad X = \log_e x, \quad Y = \log_e y, \quad Z = \log_e z$$

எனவே,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial X} \quad \frac{1}{x} + \frac{\partial z}{\partial Y} \cdot 0$$

$$= \frac{1}{x} \quad \frac{\partial z}{\partial X}$$

$$\therefore \quad px = \frac{\partial z}{\partial X}$$

ஆனால், $\dfrac{\partial Z}{\partial X} = \dfrac{\partial Z}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial X} = \dfrac{1}{z} px$

$$\therefore \quad \frac{px}{z} = \frac{\partial Z}{\partial X}$$

இவ்வாறே $\dfrac{qy}{z} = \dfrac{\partial Z}{\partial Y}$

எனவே, சமன்பாடு (1)

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 = 1$$ என்றாகும்.

அதாவது $P = \dfrac{\partial Z}{\partial X}, \ Q = \dfrac{\partial Z}{\partial Y}$ எனின்

$$P^2 + Q^2 = 1$$

இதன் முழுத்தீர்வு $Z = aX + bY + C$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 = 1, \ b^2 = 1 - a^2.$$

எனவே, சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு

$$Z + aX + \sqrt{1 - a^2}\, Y + C.$$

அதாவது $\log z = a \log x + \sqrt{1 - a^2} \log y + C.$

வகை 2 :

$z = px + qy + \phi(p, q)$ என்ற வடிவிலுள்ள பகுதி வகைக் கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்.

$$z = px + qy + \phi(p, q) \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1)-ன் முழுத் தீர்வு.

$$z = ax + by + \phi(a, b) \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\left(\because \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = a, \; q = \frac{\partial z}{\partial y} = b \right)$$

ஒருமைத் தீர்வு :

சமன்பாடு (2) ஐ a, b ஐக் குறித்துத் தனித்தனியே பகுதி வகையிட

$$0 = x + \frac{\partial \phi}{\partial a} \qquad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$0 = y + \frac{\partial \phi}{\partial b} \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3), (4)-லிருந்து a, b ஐ நீக்க ஒருமைத் தீர்வு கிடைக்கப் பெறும்.

பொதுத் தீர்வு

$$z = ax + by + \phi(a, b)$$

$b = F(a)$ என்க.

$$\therefore \quad z = ax + F(a)\,y + \phi[a, F(a)] \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

சமன்பாடு (5) ஐ a ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையிட

$$0 = x + F'(a)\,y + \phi'(a) \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

சமன்பாடுகள் (5), (6)-லிருந்து a ஐ நீக்கின் பொதுத் தீர்வு கிடைக்கப்பெறும்.

மாதிரி 8 :

தீர்க்க : $z = px + qy + c\sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad \dots \quad (1)$

சமன்பாடு (1), $z = px + qy + \phi(p, q)$ வடிவிலுள்ளது.

எனவே, இதன் முழுத்தீர்வு,

$$z = ax + by + c\sqrt{1 + a^2 + b^2} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2)ஐ a, b குறித்துத் தனித்தனியே வகையிட,

$$0 = x + \frac{c}{2\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\, 2a$$

அதாவது $0 = x + \dfrac{ac}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$

$$0 = y + \frac{c}{2\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\, 2b$$

அதாவது $0 = y + \dfrac{bc}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$

சமன்பாடுகள் (2), (3), (4)-லிருந்து a, bஐ நீக்க ஒருமைத்தீர்வு கிடைக்கப்பெறும்.

சமன்பாடு (3)-லிருந்து, $x^2 = \dfrac{c^2\, a^2}{1+a^2+b^2}$

சமன்பாடு (4)-லிருந்து, $y^2 = \dfrac{c^2\, b^2}{1+a^2+b^2}$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = \frac{c^2 (a^2 + b^2)}{1 + a^2 + b^2}$$

$$(x^2 + y^2)(1 + a^2 + b^2) = c^2 (a^2 + b^2)$$

$$x^2 + y^2 = c^2 (a^2 + b^2) - (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$$

$$= (a^2 + b^2)(c^2 - x^2 - y^2)$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 = \frac{x^2 + y^2}{c^2 - x^2 - y^2}$$

எனவே, $1 + a^2 + b^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - x^2 - y^2}$

மீண்டும் (3)-லிருந்தும் (4)-லிருந்தும்

$$a = \frac{-x\sqrt{1 + a^2 + b^2}}{c} = -\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}}$$

$$b = \frac{-y\sqrt{1+a^2+b^2}}{c} = -\frac{y}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}}$$

இம் மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (2)-ல் பிரதியிட,

$$z = \frac{-x^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{c^2-x^2-y^2}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} = \sqrt{c^2-x^2-y^2}$$

$$\therefore \quad z^2 = c^2-x^2-y^2$$

எனவே முழுத்தீர்வு :

$$x^2+y^2+z^2 = c^2.$$

பொதுத்தீர்வு காண, $b = F(a)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad z = ax + F(a)\,y + c\sqrt{1+a^2+\{F(a)\}^2} \quad \ldots \quad (5)$$

சமன்பாடு (5) ஐ a ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையிடக் கிடைக்கப் பெறும் சமன்பாட்டிலிருந்தும், சமன்பாடு (5)-லிருந்தும் a ஐ நீக்கப் பொதுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

மாதிரி 9 :

தீர்க்க : $z = px + qy + pq$

$$z = px + qy + pq \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது $z = px + qy + \phi(p, q)$ என்ற வடிவில் உள்ளதால் இதன் முழுத்தீர்வு

$$z = ax + by + ab \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2) ஐ a, b ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையிட

$$0 = x + b \qquad \therefore \quad x = -b$$

$$0 = y + a \qquad \therefore \quad y = -a$$

இதை (2)-ல் பிரதியிடின்,

$$z = -xy - xy + xy$$

$\therefore$ ஒருமைத் தீர்வு $z = xy$

மேலும் முழுத்தீர்வு (2)-ல் $b = F(a)$ எனின்,

$$z = ax + F(a)\,y + a\,F(a) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (3) ஐ a ஐக் குறித்து பகுதி வகையிட

$$0 = x + F'(a)y + aF'(a) + F(a) \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடு (3), (4)-லிருந்து a ஐ நீக்கின் பொதுத் தீர்வு கிடைக்கப் பெறும்.

வகை 3 :

$\phi(z, p, q) = 0$ என்ற வடிவிலுள்ள பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்.

$$\phi(z, p, q) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$X = x + ay$ எனவும், $z = f(x + ay)$ எனவும் கொள்வோம். இங்கு a யாதாவதொரு மாறிலி.

எனவே, $z = f(X)$

$$\therefore \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{dz}{dX}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} = a\frac{dz}{dX}$$

p, q-ன் இம்மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட,

$$\phi\left(z, \frac{dz}{dX}, a\frac{dz}{dX}\right) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2) முதல் வரிசையிலுள்ள சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடாகும் (Ordinary differential equation of first order).

$$\therefore \quad \frac{dz}{dX} = F(z, a)$$

$$\frac{dz}{F(z, a)} = dX.$$

$$\therefore \quad \psi(z, a) = X + b$$

$$= x + ay + b$$

எனவே, சமன்பாடு (1)-ன் முழுத் தீர்வு

$$\psi(z, a) = x + ay + b.$$

இதன் ஒருமைத் தீர்வும், பொதுத்தீர்வும் வழக்கமான முறையில் காணலாம்.

மாதிரி 10 :

$pz = 1 + q^2$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

$$pz = 1 + q^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$p = \frac{dz}{dX},\ q = a\,\frac{dz}{dX}$$

$$\therefore \quad z\,\frac{dz}{dX} = 1 + a^2\left(\frac{dr}{dX}\right)^2$$

$$\therefore \quad a^2\left(\frac{dz}{dX}\right)^2 - z\left(\frac{dz}{dX}\right) + 1 = 0.$$

எனவே,

$$\frac{dz}{dX} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4a^2}}{2a^2}$$

அதாவது,

$$\frac{dz}{z \pm \sqrt{z^2 - 4a^2}} = \frac{dX}{2a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dX}{2a^2} = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4a^2}}{(z \pm \sqrt{z^2 - 4a^6})\,(z \mp \sqrt{z^2 - 4a^2}}\,dz$$

$$= \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4a^2}}{z^2 - (z^2 - 4a^2)}\,dz$$

$$= \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4a^2}}{4a^2}\,dz$$

$$\therefore \quad 2dX = (z \mp \sqrt{z^2 - 4a^2})\,dz$$

$$2X + c' = \frac{z^2}{2} \mp \left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 4a^2} - \frac{4a^2}{2}\log\{z + \sqrt{z^2 - 4a^2}\}\right]$$

அதாவது,

$$4(x + ay) + c = z^2 \mp [z\sqrt{z^2 - 4a^2} - 4a^2\log(z + \sqrt{z^2 - 4a^2})]$$

மாதிரி 11 :

$q^2 = z^2 p^2 (1 - p_3)$ என்ற சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு காண்க.

$$q^2 = z^2 p^2 (1 - p^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$p = \dfrac{dz}{dX}$, $q = a \dfrac{dz}{dX}$ எனின்,

$$a^2 \left(\frac{dz}{dX}\right)^2 = z^2 \left(\frac{dz}{dX}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{dz}{dX}\right)^2\right]$$

அதாவது,

$$a^2 = z^2 \left[1 - \left(\frac{dz}{dX}\right)^2\right]$$

$$\therefore \quad \left(\frac{dz}{dX}\right) = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z}$$

$$\therefore \quad dX = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}\, dz$$

எனவே,

$$X = \sqrt{z^2 - a^2} + b$$

$$\therefore \quad (x + ay) - b = \sqrt{z^2 - a^2}$$

$$\therefore \quad (x + ay - b)^2 = z^2 - a^2$$

$\therefore$ முழுத்தீர்வு $z^2 = (x + ay - b)^2 + a^2$.

மாதிரி 12 :

$p^3 + q^3 = 3pqz$ சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு காண்க.

$$p^3 + q^3 = 3pqz \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$p = \dfrac{dz}{dX}$, $q = a \dfrac{dz}{dX}$ எனப் பிரதியிட

சமன்பாடு (1),

$\left(\dfrac{dz}{dX}\right)^3 + a^3 \left(\dfrac{dz}{dX}\right)^3 = 3az \left(\dfrac{dz}{dX}\right)^2$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad \frac{dz}{dX}(1 + a^3) = 3az$$

அதாவது $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{3a}{1 + a^3}\, dX$

$$\therefore \quad \frac{3a}{1 + a^3} X = \log z + b$$

$X = x + ay$ ஆதலின்

$$3a(x + ay) = (1 + a^3) \log z + c.$$

வகை 4 :

$\phi_1(x, p) = \phi_2(y, q)$ என்ற வடிவிலுள்ள பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

$$\phi_1(x, p) = \phi_2(y, q) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$= a \quad \text{(என்க)}$$

$$\therefore \quad p = f_1(x, a) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$q = f_2(y, a) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

அதாவது $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, a)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_2(y, a)$$

$\therefore \quad z = \int f_1(x, a)\, dx + x$ சாரா உறுப்பு

$z = \int f_2(y, a)\, dy + y$ சாரா உறுப்பு

$$\therefore \quad z = \int f_1(x, a)\, dx + \int f_2(y, a) + b \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இங்கு b யாதாவதொரு மாறிலியாகும். சமன்பாடு (4)-ல் இரு மாறிலிகள் a, b உள்ளதால், சமன்பாடு (4) கொடுத்துள்ள பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் முழுத்தீர்வு. பொதுத்தீர்வு வழக்கமான முறையில் காணலாம். மேலும் இதற்கு வகை 1ஐப்போல் ஒருமைத்தீர்வு கிடையாது.

மாதிரி 13 :

தீர்க்க : $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டை,

$\sqrt{p} - 2x = -\sqrt{q}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். எனவே சமன்பாடு (1).

$$\phi_1(x, p) = \phi_2(y, q)$$

வடிவில் உள்ளது.

$$\therefore \quad \sqrt{p} - 2x = -\sqrt{q} = a \text{ (என்க).}$$

$$\therefore \quad p = (a + 2x)^2$$

$$q = a^2$$

$$\therefore \quad z = \int (a + 2x)^2\, dx + \int a^2\, dy + b$$

$$= \frac{(a + 2x)^3}{2 \cdot 3} + a^2 y + b.$$

எனவே சமன்பாடு (1)-ன் முழுத்தீர்வு

$$z = \frac{1}{6}(a + 2x)^3 + a^2 y + b \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

பொதுத்தீர்வுகாண, $b = F(a)$ என்க.

$$\therefore \quad z = \frac{1}{6}(a + 2x)^3 + a^2 y + F(a) \qquad \ldots \qquad (3)$$

சமன்பாடு (3)ஐ aஐக்குறித்துப் பகுதி வகையிட,

$$0 = \frac{1}{2}(a + 2x)^2 \cdot 2 + 2ay + F'(a)$$

அதாவது $0 = (a + 2x)^2 + 2ay + F'(a)$. $\qquad \ldots \qquad (4)$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-லிருந்து a ஐ நீக்கினால் பொதுத் தீர்வு கிடைக்கப்பெறும்.

மாதிரி 14 :

$p^2 + q^2 = x + y$ சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காண்க.

$$p^2 + q^2 = x + y \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$p^2 - x = y - q^2$$

இது $\phi_1 (x, p) = \phi_2 (y, q)$ வடிவிலுள்ளதால்

$$p^2 - x = y - q^2 = a$$

$$\therefore \quad p = \sqrt{a+x} \quad \text{அதாவது} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{a+x}$$

$$q = \sqrt{y-a} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{y-a}$$

$$\therefore \quad z = \int \sqrt{a+x}\, dx + \int \sqrt{y-a}\, dy + b$$

$$= \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}} + b$$

எனவே முழுத்தீர்வு

$$z = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y-a)^{\frac{3}{2}} + b.$$

மாதிரி 15 :

தீர்க்க : $z^2 (p^2 + q^2) = x^2 + y^2.$

$$z^2 (p^2 + q^2) = x^2 + y^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$dZ = zdz$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad Z = \frac{z^2}{2}.$$

$$zp = z\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = P \text{ (என்க)}$$

$$zq = z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y} = Q \text{ (என்க)}$$

சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$(zp)^2 + (zq)^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad P^2 + Q^2 = x^2 + y^2.$$

அதாவது, $P^2 - x^2 = y^2 - Q^2$

இது $\phi_1 (p, x) = \phi_2 (q, y)$

வடிவில் உள்ளலால்,

$$P^2 - x^2 = y^2 - Q^2 = \lambda^2 \quad \text{(என்க).}$$

$$\therefore \quad P^2 = \lambda^2 + x^2, \quad P = \sqrt{\lambda^2 + x^2}$$

$$Q^2 = y^2 - \lambda^2, \quad Q = \sqrt{y^2 - \lambda^2}$$

எனவே, முழுத்தீர்வு

$$Z = \int \sqrt{\lambda^2 + x^2}\, dx + \int \sqrt{y^2 - \lambda^2}\, dy + \mu.$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+\lambda^2} + \lambda^2 \sinh^{-1}\dfrac{x}{\lambda}}{2}$$

$$+ \frac{y\sqrt{y^2-\lambda^2} - \lambda^2 \cosh^{-1}\dfrac{y}{\lambda}}{2} + \mu$$

$$\therefore \quad \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+\lambda^2} + \lambda^2 \sinh^{-1}\frac{x}{\lambda}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[y\sqrt{y^2-\lambda^2} - \lambda^2 \cosh^{-1}\frac{y}{\lambda}\right] + \mu$$

எனவே, முழுத் தீர்வு

$$z^2 = x\sqrt{x^2+\lambda^2} + \lambda^2 \sinh^{-1}\frac{x}{\lambda}$$

$$+ y\sqrt{y^2-\lambda^2} - \lambda^2 \cosh^{-1}\frac{y}{\lambda} + \mu. \quad \ldots \quad (2)$$

பொதுத் தீர்வு காண $\mu' = F(\lambda)$ என்போம்.

$$\therefore \quad z^2 = x\sqrt{x^2+\lambda^2} + \lambda^2 \sinh^{-1}\frac{x}{\lambda}$$

$$+ y\sqrt{y^2-\lambda^2} - \lambda^2 \cosh^{-1}\frac{y}{\lambda} + F(\lambda) \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (3) ஐ λ ஐக் குறித்து பகுதி வகையிட கிடைக்கும் சமன்பாட்டிலிருந்தும் சமன்பாடு (3)-லிருந்தும் λ ஐ நீக்க பொதுத் தீர்வு கிடைக்கப் பெறும்.

பயிற்சி 11.2

தீர்வு காண்க :

வகை 1

(1) $pq = c$

(2) $pq = 1$

(3) $p = q^2$

(4) $p^3 - q^3 = 0$

(5) $(x + y)(p + q)^2 + (x - y)(p - q)^2 = 1$

(6) $(x - y)(px - qy) = (p - q)^2$

(7) $x^2 p^2 + y^2 q^2 = m^2$

(8) $3p^2 - 2q^2 = 4pq$

(9) $pq = x^a y^b z^c$

வகை 2

(10) $z = px + qy - 2\sqrt{pq}$

(11) $z = px + qy + p^2 + q^2$

(12) $z = px + qy + \log pq$

(13) $z = px + qy + \dfrac{q}{p} - q$

(14) $(p + q)(z - xp - yq) = 1.$

வகை 3

(15) $q = 2qx$

(16) $pq = z^2$

(17) $pq = x$

(18) $z = p^2 + q^2$

(19) $p = y^2 q^2$

(20) $9(p^2 z + q^2) = 4$

(21) $z^2 (y^2 + q^2 + 1) = a^2$

வகை 4 :

(22) $p^2 + q^2 = x - y$

(23) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = z$

(24) $\dfrac{p^2}{x^2} + \dfrac{q^2}{y^2} = \dfrac{1}{z^2}$

(25) $p + y = q^2 + 3x^2$

(26) $2yp^2 = q$

(27) $p + x = qy$

(28) $p + y = q + x$

(29) $pq = xy$

(30) $q = px + p^2$

(31) $z(p^2 - q^2) = x - y$

விடைகள்

(1) $z = ax + \dfrac{m}{a} y + b$

(2) $az = a^2 x + y + C$

(3) $z = ax \pm \sqrt{a}\, y + C$

(4) $z = ax + a^{\frac{1}{3}} y + C$

(5) $z = a\sqrt{x+y} + \sqrt{1-a^2}\,\sqrt{x-y} + C$

(6) $z = b^2(x + y) + bxy + C$

(7) $z = cx^{my}\sqrt{1-m^2}$

(8) $z = a\left(x + \dfrac{3}{2+\sqrt{10}}\, y\right) + C$

(9) $\dfrac{2z^{1-\frac{c}{2}}}{2-c} = l\,\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + \dfrac{1}{l}\,\dfrac{y^{b+1}}{b+1} + m$

(10) $z = ax + by - 2\sqrt{ab}$

(11) $z = ax + by + a^2 + b^2$

(12) $z = ax + by + \log ab$

(13) $z = ax + by + \frac{b}{a} - a$

(14) $z = ax + by + \frac{1}{a+b}$

(15) $z = ax^2 + ay + b$

(16) $a(\log z)^2 = (x + ay + b)^2$

(17) $z = \frac{x^2}{2a} + ay + b.$

(18) $4(1 + a^2)z = (x + ay + b)^2$

(19) $4(az - a - 1) = (x + ay + b)^2$

(20) $(x + ay + c)^2 = (a^2 + z)^2$

(21) $(c + 1)(a^2 - z^2) = (x + cy + b)^2$

(22) $z = \frac{2}{3}(x + a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(a - y)^{\frac{3}{2}} + b$

(24) $z^2 = ax^2 + \sqrt{1 - a^2}\; y^2 + b$

(25) $z = ax + x^3 + \frac{2}{3}(y + a)^{\frac{2}{3}} + b$

(26) $(2z - ay^2 - b)^2 = 2ax^2$

(27) $z = a(x + \log y) - \frac{x^2}{2} - b$

(28) $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + a(x - y) + b$

(29) $2az = a^2x^2 + y^2 + b$

(30) $z = \frac{1}{4}[x\sqrt{x^2 + 4a} - x^2]$

$$+ 4\lambda \log \{x + \sqrt{x^2 + 4}\} + ay + C$$

(31) $z - b = (x + a)^3.$

11-8. இலகுரான்சின் சமன்பாடு (Lagrange's Equation)

$$Pp + Qq = R \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற வடிவிலுள்ள பகுதி வகைக் கெழு சமன்பாடு இலகுராான்சின் சமன்பாடு (Lagrange's Equation) எனப்படும்.

இங்கு $p = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad q = \frac{\partial z}{\partial x}.$

$$P = \frac{\partial (u, v)}{\partial (y, z)} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$Q = \frac{\partial (u, v)}{\partial (z, x)} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$R = \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

பத்தி 5-ல் $F(u, v) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து சார்பு F ஐ நீக்க

$$P_p + Q_q = R$$

வடிவில் ஒரு சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும் எனக் கண்டோம்.

$$\therefore \quad P_p + Q_q = R$$

என்ற சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு (General Integral)

$$F(u, v) = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

ஆகும்.

இப்பொழுது, நாம் காணப்போகும் ஒரு குறிப்பிட்ட வகைக் கெழு சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகள்

$$u = a, \quad v = b$$

எனக்கொள்வோம்.

பின் $u = a$, $v = b$ சமன்பாடுகளை தனித்தனியே x, y, z ஐக் குறித்துப் பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4) ஐ dx, dy, dz-க்குத் தீர்க்க,

$$\frac{dx}{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}}$$

$$= \frac{dz}{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}} \quad \dots \quad (5)$$

அதாவது,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

எனவே $u = a$, $v = b$ என்ற தீர்வுகள் தம் வகைக்கெழு சமன்பாடு

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$ ஆகும்.

எனவே $P_p + Q_q = R$ என்ற பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$F(u, v) = 0$$

இங்கு $u = a$, $v = b$ ஆகும்.

மாதிரி 16 :

தீர்க்கவும் : $xzp + yzq = xy$

$$xzq + yzq = xy \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1), $P_p + Q_q = R$ வடிவிலுள்ளது. எனவே சமன்பாடு (1)-ன் துணைச்சமன்பாடு (Auxilary equation)

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

அதாவது.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$$

முதல் இரு தகவுகளிலிருந்து,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\therefore \quad \log x \log y + \log a$$

$$\therefore \quad x = ay$$

அதாவது,

$$\frac{x}{y} = a. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

கடைசி இரு தகவுகளிலிருந்து,

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$$

$$= \frac{dz}{ay} \quad [\because x = ay]$$

$$\therefore \quad ay\,dy = zdz$$

$$\therefore \quad \frac{ay^2}{2} = \frac{z^2}{2} + b'$$

அதாவது $ay^2 = z^2 + b.$

$$\therefore \quad x = ay, \frac{x}{y} y^2 = z^2 + b$$

அதாவது $xy = z^2 + b$

$$\therefore \quad xy - z^2 = b \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

எனவே தேவையான தீர்வு,

$$F(a, b) = 0$$

அதாவது $F\left[\frac{x}{y},\ xy - z^2\right] = 0$

அதாவது $xy - z^2 = f\left(\frac{x}{y}\right)$

மாதிரி 17 :

தீர்க்கவும் : $(x^2 - yz)\,p + (y^2 - zx)\,q = z^2 - xy.$

$$(x^2 - xz)\,p + (y^2 - zx)\,q = z^2 - xy \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

இது $Pp + Qq = R$ வடிவிலுள்ளதால் சமன்பாடு (1)-ன் துணை சமன்பாடு,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

அதாவது $\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$

$$\therefore \quad \frac{dx - dy}{(x^2 - yz) - (y^2 - zx)} = \frac{dy - dz}{(y^2 - zx) - (z^2 - xy)}$$

$$= \frac{dz - dx}{(z^2 - xy) - (x^2 - yz)}$$

அதாவது,

$$\frac{dx - dy}{(x - y)(x + y + z)} = \frac{dy - dz}{(y - z)(x + y + z)}$$

$$= \frac{dz - dx}{(z - x)(x + y + z)} \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (3)-ன் முதலிரு தகவுகளிலிருந்து

$$\frac{dx - dy}{x - y} = \frac{dy - dz}{y - z}$$

$$\therefore \quad \log (x-y) = \log (y-z) + \log a$$

அதாவது, $(x-y) = a(y-z)$

$$\therefore \quad a = \frac{y-z}{x-y}.$$

இவ்வாறே சமன்பாடு (3)-ன் கடைசி இரு தகவுகளிலிருந்து,

$$\frac{dy - dz}{y-z} = \frac{dz - dx}{z-x}$$

$$\therefore \quad \log (y-z) = \log (z-x) + \log b$$

$$\therefore \quad y-z = b(z-x).$$

அதாவது, $b = \dfrac{y-z}{z-x}$.

எனவே, சமன்பாட்டின் தீர்வு $F(a, b) = 0$

அதாவது $F\left[\dfrac{x-y}{y-z}, \dfrac{y-z}{z-x}\right] = 0$

அதாவது, $\dfrac{x-y}{y-z} = f\left(\dfrac{y-z}{z-x}\right)$.

மாதிரி 18 :

தீர்க்கவும் : $x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y)$.

$$x(y-z)p + y(z-x)q = z(x-y) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1), $Pp + Qq = R$ வடிவிலுள்ளதால் துணை சமன்பாடு,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

அதாவது,

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{x}dx}{y-z} = \frac{\frac{1}{y}dy}{z-x} = \frac{\frac{1}{z}dz}{x-y}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz}{0} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz = 0$$

$$\therefore \quad \log x + \log y + \log z = \log a$$

$$\therefore \quad xyz = a$$

மேலும் சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$\frac{(y+z)\,dx}{x^2(y^2-z^2)} = \frac{(x+z)\,dy}{y^2(z^2-x^2)} = \frac{(x+y)\,dz}{z^2(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{(y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz}{0} \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடு (4)-லிருந்து,

$$(y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0$$

அதாவது $(ydx + xdy) + (zdy + ydz) + (xdz + zdx) = 0$

$$\therefore \quad d(xy) + d(yz) + d(zx) = 0$$

எனவே, $\underline{xy + yz + zx = b}$

$\therefore$ சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வு

$$F(a, b) = 0$$

அதாவது $F[xyz, xy + yz + zx] = 0$

$$\therefore \quad xy + yz + zx = f(xyz)$$

மாதிரி 19 :

தீர்க்கவும் : $(y^3x - 2x^4)p + (2y^4 - x^3y)q = 9z(x^3 - y^3)$

$$(y^3x - 2x^4)p + (2y^4 - x^3y)q = 9z(x^3 - y^3) \quad \dots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1), $P_p + Q_q = R$ வடிவிலுள்ளதால் அதன், துணைச் சமன்பாடு

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

அதாவது $\dfrac{dx}{y^3x - 2x^4} = \dfrac{dy}{2y^4 - x^3y} = \dfrac{dz}{9z(x^3 - y^3)} \quad \dots \quad (2)$

முதலிரு தகவுகளிலிருந்து

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 - x^3y}{y^3x - 2x^4}$$

இது ஒரு சமபடித்தான சமன்பாடாதலின்

$y = vX$ எனப் பிரதியிடின்

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{2v^4x^4 - vx^4}{v^3x^4 - 2x^4}$$

$$= \frac{2v^4 - v}{v^3 - 2}$$

$$\therefore \quad X\frac{dv}{dX} = \frac{2v^4 - v - v^4 + 2v}{v^3 - 2}$$

$$= \frac{v^4 + v}{v^3 - 2}$$

$$\therefore \quad \frac{dX}{X} = \frac{v^3 - 2}{v^4 + v}\, dv$$

$$= \left[-\frac{2}{v} + \frac{1}{v+1} + \frac{2v-1}{v^2 - v + 1} \right] dv$$

$$\therefore \quad \log X + \log a = -2 \log v + \log (v+1) + \log (v^2 - v + 1)$$

$$\therefore \quad ax = \frac{(v+1)(v^2 - v + 1)}{v^2}$$

$$= \frac{v^3 + 1}{v^2} = \frac{y^3 + x^3}{xy^2} \quad \left(\because \ v = \frac{y}{x} \right)$$

$$\therefore \quad \underline{a = \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}}\,.$$

மீண்டும் சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$\frac{\frac{1}{x}\, dx}{y^3 - 2x^3} = \frac{\frac{1}{y}\, dy}{2y^3 - x^3} = \frac{\frac{1}{z}\, dz}{9(x^3 - y^3)}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{y}\, dy}{3(y^3 - x^3)} = \frac{\frac{1}{z}\, dz}{9(x^3 - y^3)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{y}\, dy = -\frac{1}{3z}\, dz.$$

எனவே,

$$\log x + \log y = \log b' - \frac{1}{3} \log z.$$

$$\therefore \quad xy = \frac{b'}{z^{1/3}}$$

அதாவது,

$$xyz^{\frac{1}{3}} = b'$$

$$\therefore \quad \underline{x^3 y^3 z = b}$$

எனவே, தேவையான தீர்வு $F(a, b) = 0$.

அதாவது,

$$F\left[\frac{x^3+y^3}{x^2y^2},\ x^3y^3z\right].$$

அதாவது,

$$z=\frac{1}{x^3y^3}f\left(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\right).$$

மாதிரி 20 :

தீர்க்க : $z-px-qy=a\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

$$z-px-qy=a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad\ldots\quad\ldots\quad(1)$$

$$\therefore\quad px+qy=z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

இது $P_p+Q_q=R$ வடிவிலுள்ளதால், இதன், துணைச் சமன்பாடு (Auxilary equation).

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

அதாவது,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\quad\ldots\quad\ldots\quad(2)$$

$$\therefore\quad\frac{xdx}{x^2}=\frac{y\,dy}{y^2}=\frac{zdz}{z(z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2})}$$

$$=\frac{x\,dx+y\,dy++zdz}{x^2+y^2+z^2-az\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \ldots\ \ldots(3)$$

சமன்பாடு (2)-ன் முதலிரு தகவுகளிலிருந்து,

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

$$\therefore\quad\log x=\log y+\log a$$

$$x=ay$$

அதாவது $a=\dfrac{x}{y}.$

சமன்பாடு (3)-ன் கடைசி இரு தகவுகளிலிருந்து

$$\frac{dz}{z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2+y^2+z^2) - az\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ எனின்}$$

$$udu = xdx + ydy + zdz.$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{z - au} = \frac{udu}{u^2 - azu}$$

$$= \frac{du}{u - az}$$

எனவே, $\dfrac{dz}{z-au} = \dfrac{du}{u-az} = \dfrac{dz + du}{(1-a)(z+u)}$

$$= \frac{dx}{x} \quad [\text{சமன்பாடு (2) லிருந்து}]$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{x} = \frac{d(z+u)}{(1-a)(z+u)}$$

$$\therefore \quad (1 - a)[\log x + \log b'] = \log(z + u)$$

$$\therefore \quad bx^{1-a} = z + u$$

$$= z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

எனவே, $b = \dfrac{z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^{1-a}}$

$\therefore$ தேவையான தீர்வு $F(a, b) = 0$

அதாவது $F\left[\dfrac{x}{y}, \quad \dfrac{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^{1-a}}\right] = 0$

பயிற்சி 11·3

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

(1) $(a-x)p + (b-y)q = c-z$

(2) $(x + 2z)p + (4zx - y)q = 2x^2 + y$

(3) $(x^3 + 3xy^2)p + (y^3 + 3x^2y)q = 3(x^2 + y^2)z$

(4) $(y + z)p + (z + x)q = (x + y)$

(5) $pz - qz = z^2 + (x+y)^2$

(6) $(y^2 + z^2)\, p - xy\, q + zx = 0$

(7) $\dfrac{p}{x^2} + \dfrac{q}{y^2} = z$

(8) $(2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - zx - xy)\, p$
$+ (x^2 + 2y^2 + z^2 - yz - 2zx - xy)\, q$
$= (x^2 + y^2 + 2z^2 - yz - zx - 2xy)$

(9) $\dfrac{y-z}{yz}\, p + \dfrac{z-x}{zx}\, q = \dfrac{x-y}{xy}$

(10) $(p-q)(x+y) = z$

(11) $p \cos(x+y) + q \sin(x+y) = z$

(12) $(z^2 - 2yz - y^2)\, p + (xy + zx)\, q = xy - zx$

(13) $(xy - z^2)(px - qy) = x^3$

(14) $zxq + \dfrac{y^2 z}{x}\, p = y^2$

(15) $(1-x)\, p + (2-y)\, q = 3 - z$

(16) $px^2 + qy^2 = (x+y)\, z$

(17) $(y^2 + z^2 - x^2)\, p + 2zx = 2\, xyq$

(18) $ap + bq + cz = 0$

(19) $p \sin x + q \cos y = \tan z$

(20) $(x^2 - yz)\, p + (y^2 - zx)\, q = z^2 - xy$

(21) $px^2 + qy^2 = z^2$.

விடைகள்

(1) $F\left(\dfrac{x-a}{y-b}, \dfrac{y-b}{z-c}\right) = 0$

(2) $F(xy - z^2,\ x^2 - y - z) = 0$

(3) $F\left[\dfrac{1}{(x+y)^2} - \dfrac{1}{(x-y)^2}, \dfrac{z^2}{xy}\right] = 0$

(4) $F\left[\dfrac{x-y}{y-z}, (x-y)^2 (x+y+z)\right]$

(5) $F[x+y,\ e^{2y}\{(x+y)^2+z^2\}]=0$

(6) $F\left[x^2+y^2+z^2,\ \frac{y}{z}\right]=0$

(7) $e^{y^3/3}=zf(x^3-y^3)$

(8) $F\left[\frac{x-y}{y-z},\ \frac{y-z}{z-x}\right]=0$

(9) $F[x+y+z,\ xyz]=0$

(10) $F\left[\frac{z}{e^{x/x+y}},\ x+y\right]$

(11) $F\left[e^{y-x}\{\cos(x+y)+\sin(x+y)\},\ \frac{1}{z\sqrt{2}}\tan\left\{\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{8}\right\}\right]=0$

(12) $F[x^2+y^2+z^2,\ y^2-z^2-2yz]=0$

(13) $F[x^3+z^3-3xyz,\ xy]=0$

(14) $F[(x^3-y^3),\ (x^2-z^2)]=0$

(15) $F\left[\frac{z-3}{1-x},\ \frac{2-y}{1-x}\right]=0$

(16) $F\left[\frac{x-y}{z},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right]=0$

(17) $F\left[\frac{y}{z},\ \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right]=0$

(18) $F\left[ay-bx,\ ze^{\frac{cx}{a}}\right]=0$

(19) $F\left[\sin z\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right),\ \sin z\cot\frac{x}{2}\right]=0.$

(20) $F\left[\frac{x-y}{y-z},\ \frac{y-z}{z-x}\right]=0$

(21) $\frac{z-y}{zy}=f\left(\frac{y-x}{yx}\right).$

நிலை எண் கெழுக்கள் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை ஒரு படிபகுதி வகைக் கெழு சமன்பாடுகள் (Second order linear partial differential equations with constant coefficients)

11-9. சமபடித்தான சமன்பாடு — துணைத் தீர்வு (Homogeneous equation — Complementary function)

சம படித்தான சமன்பாடு,

$$F(D, D')\, z = f(x, y)$$

என்ற வடிவில் உள்ளதாகக் கொள்வோம். இங்கு $F(D, D')$ என்பது நிலை எண் கெழுக்களுடன் D, D' ல் இரு படி சமபடித்தான பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

இதனுடைய தீர்வுகள் இரு பகுதிகள் கொண்டதாகும். அவை துணைத் தீர்வு (Complementary function), சிறப்புத்தீர்வு (Particular Integral) எனப்படும்.

முதலில் $F(D, D')\, z = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்ப்போம். இதன் தீர்வு துணைத் தீர்வு எனப்படும்.

அதாவது z = துணைத் தீர்வு.

$F(D, D')\, z = 0$ ஒரு இரு படியிலுள்ள சமபடித்தான சமன் பாடாதலின், இதன் காரணிகள் $(D - m_1 D')$, $(D - m_2 D')$ ஆகும்

அதாவது $(D - m_1 D')(D - m_2 D')\, z = 0$

முதலில் $(D - m_1 D')\, z = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$(D - m_1 D')\, z = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} - m_1 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \; p - m_1 q = 0$$

இது $P_p + Q_q = R$ என்ற வடிவில் உள்ளதால், இதன் துணை சமன்பாடு,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

அதாவது $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_1} = \frac{dz}{0}$

முதலிரு தகவுகளிலிருந்து.

$$dy + m_1 dx = 0$$

அதாவது,

$$\underline{y + m_1 x = a.}$$

கடைசி இரு தகவுகளிலிருந்து,

$$dz = 0$$

$$\therefore \quad \underline{z = b}$$

எனவே தீர்வு $f_1\,(y + m_1\,x,\, z) = 0$

அதாவது,

$(D - m_1\,D')\,z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$z = \phi_1\,(y + m_1\,x).$$

இவ்வாறே $(D - m_2\,D')\,z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$z = \phi_2\,(y + m_2 x).$$

$\therefore$ $F\,(D, D^1)\,z = 0$ சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு

$$\underline{z = \phi_1\,(y + m_1 x) + \phi_2\,(y + m_2 x).}$$

$m_1 = m_2 = m$ எனின், $F\,(D, D^1)\,z = 0$ சமன்பாடு

$(D - m\,D')\,(D - m\,D')\,z = 0.$ என்றாகும்.

அதாவது,

$$(D - m\,D')^2\,z = 0. \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$u = (D - m\,D')\,z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

எனவே சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$(D - m\,D')\,(D - m\,D')\,z = 0$$

$$(D - m\,D')\,u = 0.$$

$$\therefore \quad u = \phi_1\,(y + mx)$$

எனவே சமன்பாடு (2)-லிருந்து,

$$\phi_1 (y + mx) = (D - m D') z.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} - m \frac{\partial z}{\partial y} = \phi_1 (y + mx).$$

இது $P_p + Q_q R$ வடிவிலிருப்பதால்

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{\phi_1 (y + mx)}$$

முதலிரு தகவுகளிலிருந்து.

$$dy + mdx = 0$$

$$\therefore \quad y + mx = a.$$

முதலாவது மூன்றுவது தகவுகளிலிருந்து,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{\phi_1 (y + mx)}$$

$$\therefore \quad dx = \frac{dz}{\phi_1 (a)} \quad [\because \quad a = y + mx]$$

அதாவது $dz = \phi_1 (a)\, dx$

$$\therefore \quad z = x\, \phi_1 (a) + b.$$

எனவே சமன்பாட்டின் துணைத்தீர்வு,

$$z = x\, \phi_1 (y + mx) + \phi_2 (y + mx).$$

மாதிரி 21 :

$(D^2 - 5DD' + 4D'^2)\, z = \sin (4x + y)$ என்ற சமன்பாட்டின் துணைத்தீர்வு காண்க.

$$(D^2 - 5DD' + 4D'^2)\, z = \sin (4x + y).$$

துணைத் தீர்வு காண,

$[D^2 - 5DD' + 4D'^2]\, z = 0$ எனக்கொள்வோம்.

$D = m,\ D' = 1$ எனப் பிரதியிட

துணை சமன்பாடு, $m^2 - 5m + 4 = 0$.

$$\therefore \quad (m-4)(m-1) = 0$$

எனவே, $m_1 = 1$, $m_2 = 4$.

$\therefore$ துணைத்தீர்வு

$$z = \phi_1(y + x) + \phi_2(y + 4x).$$

மாதிரி 22 :

$(D - D')^2 z = x$ சமன்பாட்டின் துணைத்தீர்வு காண்க.

$$(D - D')^2 z = x$$

துணைத் தீர்வுகாண, $(D - D')^2 = 0$ என்க.

$D = m$, $D' = 1$ எனப்பிரதியிட

துணை சமன்பாடு, $(m - 1)^2 = 0$

$$\therefore \quad m_1 = 1,\ m_2 = 1.$$

$\therefore$ துணைத்தீர்வு, $z = x\phi_1(y + x) + \phi_2(y + x)$

11-10. சமபடித்தான சமன்பாடு—சிறப்புத்தீர்வு (Homogeneous equation — Particular Integral)

$$F(D, D')z = f(x, y)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு எனக் கொள்வோம்.

சிறப்புத் தீர்வு காணச் சாதாரண வகைக் கெழு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காண மேற்கொண்ட முறையே இங்கும் மேற்கொள்ள வேண்டும்.

அதாவது,

(i) $$\frac{1}{F(D, D')} e^{\alpha x + \beta y} = \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{F(\alpha, \beta)}$$

(ii) $$\frac{1}{F(D^2, D'^2)} \cos \alpha x \cos \beta y = \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{F(-\alpha^2, -\beta^2)}$$

(iii) $$\frac{1}{F(D, D')} e^{\alpha x + \beta y} \phi(x, y)$$

$$= \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{F(D + \alpha, D' + \beta)} \phi(x, y).$$

முதலியவை.

பின் வரும் எடுத்துக்காட்டுகளால் சிறப்புத் தீர்வு காணும் வகையை விளக்குவோம்.

மாதிரி 23 :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{4x+3y}$$

என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தீர்வு காண்க.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{4x+3y}$$

அதாவது, $(D^2 + 2DD' + D'^2)\,z = e^{4x+3y}$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{D^2 + 2DD' + D'^2}\, e^{4x+3y}$$

$$= \frac{e^{4x+3y}}{16 + 2\cdot 4\cdot 3 + 9}$$

$$= \frac{1}{49}\, e^{4x+3y}$$

எனவே சிறப்புத் தீர்வு,

$$z = \frac{1}{49}\, e^{4x+3y}$$

மாதிரி 24 :

$(D^2 + D'^2)\,z = \cos 2x \cos 3y$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தீர்வு காண்க.

$$(D^2 + D'^2)\,z = \cos 2x \cos 3y$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{D^2 + D'^2} \cos 2x \cos 3y$$

$$= \frac{\cos 2x \cos 3y}{-4-9}$$

$$= \frac{1}{13} \cos 2x \cos 3y.$$

எனவே சிறப்புத்தீர்வு,

$$z = -\frac{1}{13} \cos 2x \cos 3y$$

மாதிரி 25 :

$(D^2 - a^2 D'^2) z = x^2$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத்தீர்வு காண்க.

$$(D^2 - a^2 D'^2) z = x^2$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{D^2 - a^2 D^2} x^2$$

$$= \frac{1}{D^2\left[1 - a^2 \frac{D'^2}{D^2}\right]} x^2$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - a^2 \frac{D'^2}{D^2}\right]^{-1} x^2$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 + a^2 \frac{D'^2}{D^2} + a^4 \frac{D'^4}{D^4} + \dots\right]x^2$$

$$= \frac{1}{D^2} [x^2]$$

$$= \frac{1}{D}\left[\frac{x^3}{3}\right] = \frac{x4}{3\cdot 4} = \frac{x^4}{12}$$

எனவே சிறப்புத்தீர்வு,

$$z = \frac{x^4}{12}.$$

மாதிரி 26 :

$(D^2 - 3DD' + 2D'^2) z = (3 + 5x) e^{2x+3y}$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$(D^2 - 3DD' + 2D'^2) z = (3 + 5x) e^{2x+3y}$$

$$\therefore z = \frac{1}{D^2 - 3DD' + 2D'^2} (3 + 5x) e^{2x+3y}$$

$$= \frac{1}{(D-D')\ (D-2D')} (3 + 5x) e^{2x+3y}$$

$$= e^{2x+3y} \frac{1}{\{(D+2)-(D'+3)\}\ \{(D+2) - 2(D'+3)\}} (3 + 5x)$$

$$= e^{2x+3y} \frac{1}{(D-D'-1)(-D-4)} (3+5x)$$

$$= e^{2x+3y} \frac{1}{\left\{1-(D-D')\right\} 4\left(1+\frac{D}{4}\right)} (3+5x)$$

$$= e^{2x+3y} \frac{1}{4}\left(1+\frac{D}{4}\right)^{-1} \left\{1-(D-D')\right\}^{-1} (3+5x)$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{4}\left\{1-\frac{D}{4}+\frac{D^2}{16}\ldots\right\}\left\{1+(D-D') + (D-D')^2+\ldots\right\}(3+5x)$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{4}\left(1-\frac{D}{4}\ldots\right)(1+D+\ldots)(3+5x)$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{4}\left(1+\frac{3}{4}D+\ldots\right)(3+5x)$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{4}\left[(3+5x)+\frac{3}{4}D(3+5x)\right]$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{4}\left[3+5x+\frac{3}{4}\cdot 5\right]$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{4}\left[5x+\frac{27}{4}\right]$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{16}[20x+27]$$

எனவே சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$z = \frac{e^{2x+3y}}{16}(20x+27)$$

11-11. சமபடியற்ற சமன்பாடு—துணைத் தீர்வும், சிறப்புத் தீர்வும் (Non-Homogeneous equations — Complementary function and Particular Integral)

துணைத் தீர்வு :

$(D-m_1 D'-a)(D-m_2 D'-b)\, z = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு

$$z = e^{ax} F_1(y+m_1 x) + e^{bx} F_2(y+m_2 x)$$

$$(D - mD' - a)^2 z = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு

$$z = e^{ax} F_1 (y + mx) + x e^{ax} F_2 (y + mx)$$

மாதிரி 27 :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு காண்க.

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

அதாவது.

$$(D - D^1 + D^2 - D'^2)\, z = 0.$$

$$(D - D')\,(1 + D + D')\, z = 0.$$

$$(D - D')\, z = 0$$

இங்கு $m = 1$

எனவே, இதன் துணைத் தீர்வு, $z = F_1 (y + x)$.

$$(D + D' + 1)\, z = 0$$

அதாவது,

$$[D - (-1) D' - (-1)]\, z = 0.$$

இங்கு $m = -1$, $a = -1$.

எனவே, இதன் துணைத் தீர்வு, $z = e^{-x} F_2 (y - x)$.

∴ சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு

$$z = F_1 (y + x) + e^{-x} F_2 (y - x).$$

மாதிரி 28 :

$$(D + D' - 1)\,(D + 2D' - 3)\, z = 0.$$

என்ற சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு காண்க.

$$(D + D' - 1)\,(D + 2D' - 3)\, z = 0.$$

$$(D + D' - 1)\, z = 0$$

அதாவது, $[D + (-1)\, D' - 1]\, z = 0$

இங்கு $m = -.\ a = 1.$

எனவே, இதன் துணைத் தீர்வு $z = e^x\, F_1\, (y - x).$

$$(D + 2D' - 3)\, z = 0$$

அதாவது,

$$[D - (-2)\, D' - 3]\, z = 0$$

இங்கு $m = -2,\ a = 3.$

எனவே, இதன் துணைத் தீர்வு $z = e^{3x}\, F_3\, (y - 2x).$

∴ தேவையான துணைத் தீர்வு

$$z = e^x\, F_1\, (y - x) + e^{3x}\, F_2\, (y - 2x).$$

சிறப்புத் தீர்வு (Particular Integral)

சிறப்புத் தீர்வு காண சாதாரண வகைக்கெழு சமன்பாடுகளில் முறையே இங்கும் மேற்கொள்ளப்படும்.

அதாவது,

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{F(D, D')}\, e^{\alpha x + \beta y} = \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{F(\alpha, \beta y)}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{1}{F(D^2, D'^2)}\, (\sin (\alpha x + \beta y) = \frac{\sin (\alpha x + \beta y)}{F(-\alpha^2, -\beta^2)}$$

குறிப்பு :

DD'-க்கு $-\alpha\beta$ எனப் பிரதியிடவேண்டும்.

$$\text{(iii)}\quad \frac{1}{F(D, D')}\, e^{\alpha x + \beta y}\, V = \frac{e^{\alpha x + \beta y}}{F(D + \alpha, D' + \beta)}\, V.,$$

முதலியவை.

மாதிரி 29 :

$D^2 - (DD' + D' - 1)\, z = \cos (x + 2y)$ என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண்க.

$$(D^2 - DD' + D' - 1)\, z = \cos (x + 2y)$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{D^2 - DD' + D' - 1} \cos(x + 2y)$$

$$= \frac{1}{-1 - (-2) + D' - 1} \cos(x + 2y)$$

$$= \frac{1}{D'} \cos(x + 2y)$$

$$= \int \cos(x + 2y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \sin(x + 2y).$$

எனவே, சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$z = \frac{1}{2} \sin(x + 2y).$$

மாதிரி 30 :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} - 5 \frac{\partial z}{\partial y} + 3z = 2x + 3y$$

என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு காண்க.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial z}{\partial x} - 5 \frac{\partial z}{\partial y} + 3z = 2x + 3y.$$

அதாவது,

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2 - 4D - 5D' + 3)\, z = 2x + 3y.$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{D^2 + 3DD' + 2D'^2 - 4D - 5D' - 3} (2x + 3y)$$

$$= \frac{1}{(D + D' - 1)(D + 2D' - 3)} (2x + 3y)$$

$$= \frac{1}{\left\{1 - (D + D')\right\}\, 3 \left\{1 - \left(\frac{D}{3} + \frac{2}{3} D'\right)\right\}} (2x + 3y)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1-(D+D')\right\}^{-1}\left\{1-\left(\frac{D}{3}+\frac{2}{3}D'\right)\right\}^{-1}(2x+3y).$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1+(D+D')+\dots\right\}\left\{1+\left(\frac{D}{3}+\frac{2D'}{3}\right)+\dots\dots\right\}(2x+3y)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1+\frac{D}{3}+\frac{2D'}{3}+D+\frac{D^2}{3}+\frac{2DD'}{3}+D' + \frac{DD'}{3}+\frac{2}{3}D'+\dots\dots\right\}(2x+3y)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{1+\frac{4D}{3}+\frac{5D'}{3}+\dots\dots\right\}(2x+3y)$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2x+3y)+\frac{4}{3}D(2x+3y) + \frac{5}{3}D'(2x+3y)+\dots\dots\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2x+3y)+\frac{4}{3}(2)+\frac{5}{3}(3)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[2x+3y+\frac{8}{3}+5\right]$$

$$= \frac{1}{9}[6x+9y+23].$$

எனவே சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$z = \frac{1}{9}(6x+9y+23).$$

மாதிரி 31 :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$$

என்ற சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வையும், துணைத் தீர்வையும் காண்க.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy$$

அதாவது.

$$(D^2 + 5DD' + 6D'^2)\, z = xy.$$

துணைத் தீர்வு $(D^2 + 5DD' + 6D'^2)\, z = 0$

$D = m,\ D' = 1$ எனப்பிரதியிடின், $(m^2 + 5m + 6) = 0$

$$m_3 = -2,\ m_2 = -3.$$

எனவே துணைத் தீர்வு

$$z = F_1(y - 2x) + F_2(y - 3x).$$

சிறப்புத் தீர்வு :

$$z = \frac{1}{D^2 + 5DD' + 6D'^2}\, xy$$

$$= \frac{1}{D^2\left[1 + \frac{5D'}{D} + \frac{6D'^2}{D^2}\right]}\, xy$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 + \frac{5D'}{D} + \frac{6D'^2}{D^2}\right]^{-1} xy$$

$$= \frac{1}{D^2}\left\{1 + \left(\frac{5D'}{D} + \frac{6D'^2}{D^2}\right)\right\}^{-1} xy$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - \left(\frac{5D'}{D} + \frac{6D'^2}{D^2}\right) + \ldots\right] xy$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - \frac{5D'}{D} \ldots\right] xy$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[xy - \frac{5}{D}\, x\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\, xy - \frac{5}{D^3}\, x$$

$$= \frac{1}{D}\, \frac{yx^2}{2} - \frac{5}{D^2}\, \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{yx^3}{2.3} - \frac{5}{D} \cdot \frac{x^3}{2.3}$$

$$= \frac{x^3 y}{6} - \frac{5x^4}{24}$$

எனவே, சிறப்புத் தீர்வு

$$z = \frac{x^3 y}{6} - \frac{5x^4}{24}$$

∴ சமன்பாட்டின் தேவையான தீர்வு

z = துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு

அதாவது $z = F_1(y-2x) + F_2(y-3x) + \frac{x^3 y}{6} - \frac{5x^4}{24}$

மாதிரி 32 :

முழுவதும் விடுவி

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{3\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + y$$

அதாவது $(D^2 + 3DD' + 2D'^2)z = x + y$

துணைத் தீர்வு

$D = m,\ D' = 1$ எனப்பிரதியிடின்,

துணைச் சமன்பாடு $m^2 + 3m + 2 = 0.$

அதாவது $(m+1)(m+2) = 0$

$$\therefore\ m_1 = -1,\quad m_2 = -2$$

எனவே, துணைத் தீர்வு

$$z = F_1(y-x) + F_2(y-2x).$$

சிறப்புத் தீர்வு

$$z = \frac{1}{D^2 + 3DD' + 2D'^2}(x+y)$$

$$= \frac{1}{(D+D')(D+2D')}(x+y)$$

$$= \frac{1}{D\left(1 + \frac{D'}{D}\right) D\left(1 + \frac{2D'}{D}\right)}(x+y)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left(1 + \frac{D'}{D}\right)^{-1}\left(1 + \frac{2D'}{D}\right)^{-1}(x+y)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - \frac{D'}{D} - \frac{D'^2}{D^2} \cdots\right]\left[1 - \frac{2D'}{D} + \frac{4D'^2}{D^2} \cdots\right](x+y)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - \frac{D'}{D} - \frac{2D'}{D} \cdots\right](x+y)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - \frac{3}{D}D' \cdots\right](x+y)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[(x+y) - \frac{3}{D}D'(x+y) \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[(x+y) - \frac{3}{D}(1)\right]$$

$$= \frac{1}{D^2}[(x+y) - 3x]$$

$$= \frac{1}{D^2}[y - 2x]$$

$$= \frac{1}{D}[yx - x^2]$$

$$= y\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

எனவே சிறப்புத் தீர்வு

$$z = \frac{yx^2}{z} - \frac{x^3}{3}.$$

∴ சமன்பாட்டின் தேவையான தீர்வு

z = துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு

அதாவது $z = F_1(y-x) + F_2(y-2x) + \frac{yx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

மாதிரி 33 :

முழுவதும் : தீர்க்க $(D^2 - D'^2)z = \sin 2x \sin 3y$.

துணைத் தீர்வு

$D = m, \quad D' = 1$ எனப் பிரதியிடின் துணைச் சமன்பாடு,

$$(m^2 - 1) = 0$$

$$(m + 1)(m - 1) = 0$$

$$\therefore \quad m_1 = 1, \quad m_2 = -1.$$

எனவே துணைத் தீர்வு

$$z = F_1(y + x) + F_2(y - x).$$

சிறப்புத் தீர்வு

$$z = \frac{1}{D^2 - D'^2} \sin 2x \sin 3y.$$

$$= \frac{1}{(-4) - (-9)} \sin 2x \sin 3y$$

$$= \frac{1}{5} \sin 2x \sin 3y$$

∴ தேவையான தீர்வு

$z =$ துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு

அதாவது,

$$z = F_1(y + x) + F_2(y - x) + \frac{1}{5} \sin 2x \sin 3y.$$

மாதிரி 34 :

$(D^2 - D'^2 + D + 3D' - 2)z = e^{x-y}$ என்ற சமன்பாட்டை முழுவதும் தீர்க்க

$$(D^2 - D'^2 + D + 3D' - 2)z = e^{x-y} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

துணைத் தீர்வு :

சமன்பாடு (1)-ன் துணைச் சமன்பாடு,

$$(D^2 - D'^2 + D + 3D' - 2) = 0$$

அதாவது $(D + D' - 1)(D - D' + 2) = 0$

$(D + D' - 1)\, z = 0$

அதாவது $[D - (-1)\, D' - 1]\, z = 0$

இங்கு $a = 1,\ m = -1$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு $z = e^{x} F_1\,(y - x)$

$(D - D' + 2)\, z = 0$

அதாவது $[D - D' - (-2)]\, z = 0$

இங்கு $m = 1,\ a = -2.$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு $z = e^{-2x} F_2\,(y + x)$

எனவே சமன்பாட்டின் துணைத்தீர்வு

$z = e^{x} F_1\,(y-x) + e^{-2x} F_2\,(y + x).$

சிறப்புத்தீர்வு

$$z = \frac{1}{(D + D' - 1)(D - D' + 2)}\, e^{x-y}$$

$$= \frac{e^{x-y}}{\{1 + (-1) - 1\}\ \{1 - (-1) + 2\}}$$

$$= \frac{e^{x-y}}{(-1)(4)} = -\frac{1}{4}\, e^{x-y}.$$

எனவே சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$z = -\frac{1}{4}\, e^{x-y}.$$

$\therefore$ தேவையான தீர்வு

$z =$ துணைத் தீர்வு $+$ சிறப்புத் தீர்வு

அதாவது,

$$z = e^{x} F_1\,(y - x) + e^{-2x} F_2\,(y + x) - \frac{1}{4}\, e^{x-y}.$$

மாதிரி 35 :

முழுவதும் தீர்க்க :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x+3y} + \sin(2x+y) + xy.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x+2y} + \sin(2x+y) + xy.$$

அதாவது,

$$(D^2 - DD' + D'^2 + 2D + 2D')z = e^{2x+3y} + \sin(2x+y) + xy.$$

துணைத் தீர்வு :

துணைச் சமன்பாடு, $(D^2 - DD' + D'^2 + 2D + 2D') = 0$

அதாவது,

$$(D + D')(D - 2D' + 2)z = 0.$$

$$(D + D')z = 0.$$

$D = m,\ D' = 1$ எனின், $m + 1 = 0$.

$$\therefore \quad m = -1$$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு $z = F_1(y - x)$.

$$(D - 2D' + 2)z = 0$$

அதாவது $[D - 2D' - (-2)]z = 0$

இங்கு $m = 2, \quad a = -2$

எனவே, துணைத் தீர்வு $z = e^{-2x} F_2(y + 2x)$

$\therefore$ சமன்பாட்டின் துணைத் தீர்வு

$$z = F_1(y - x) + e^{-2x} F_2(y + 2x)$$

சிறப்புத் தீர்வு :

$$z = \frac{1}{(D+D')(D-2D'+2)}[e^{2x+3y} + \sin(2x+y) + xy]$$

e^{2x+3y}-ன் சிறப்புத் தீர்வு

$$= \frac{1}{(D+D')(D-2D'+2)} e^{2x+3y}$$

$$= \frac{e^{2x+3y}}{(2+3)(2-2.3+2)} = -\frac{1}{10} e^{2x+3y}$$

$\sin(2x+3y)$ -ன் சிறப்புத் தீர்வு

$$= \frac{1}{(D+D')(D-2D'+2)} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{1}{D^2-DD'-2D'^2+2D+2D'} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{1}{(-4)-(-2)-2(-1)+2D+2D'} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{1}{2(D+D')} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{D-D'}{2(D^2-D'^2)} \sin(2x+y)$$

$$= \frac{(D-D')\sin(2x+y)}{2[(-4)-(-1)]}$$

$$= -\frac{1}{6}(D-D')\sin(2x+y)$$

$$= -\frac{1}{6}[2\cos(2x+y) - \cos(2x+y)]$$

$$= -\frac{1}{6}\cos(2x+y).$$

xy-ன் சிறப்புத் தீர்வு

$$= \frac{1}{(D+D')(D-2D'+2)} xy$$

$$= \frac{1}{D\left(1+\frac{D'}{D}\right)2\left(1+\frac{D}{2}-D'\right)} xy.$$

$$= \frac{1}{2D}\left(1+\frac{D'}{D}\right)^{-1}\left(1+\frac{D}{2}-D'\right)^{-1} xy$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 - \frac{D'}{D} + \ldots\ldots\right]\left[1 - \left(\frac{D}{2} - D'\right) + \left(\frac{D}{2} - D'\right)^2 \ldots\ldots\right] xy$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 - \frac{D'}{D} \ldots\ldots\right]\left[1 - \frac{D}{2} + D' - DD' \ldots\right] xy$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 - \frac{D}{2} + D' - DD' - \frac{D'}{D} + \frac{D'}{2} \ldots\ldots\right] xy$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1 - \frac{D}{2} + \frac{3}{2} D' - \frac{D'}{D} - DD' \ldots\ldots\right] xy$$

$$\frac{1}{2D}\left[xy - \frac{1}{2} D(xy) + \frac{3}{2} D'(xy) - \frac{D'}{D}(xy) - D D'(xy)\right]$$

$$= \frac{1}{2D}\left[xy - \frac{1}{2} y + \frac{3}{2} x - \frac{1}{D} x - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} y - \frac{1}{2} yx + \frac{3}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - x\right]$$

எனவே சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$z = -\frac{1}{10} e^{2x+3y} - \frac{1}{6}\cos(2x + y) + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} y - \frac{1}{2} yx + \frac{3}{4} x^2 - \frac{x^3}{6} - x\right]$$

∴ சமன்பாட்டின் தீர்வு

$z =$ துணைத் தீர்வு $+$ சிறப்புத் தீர்வு

அதாவது,

$$z = F_1(y - x) + e^{-2x} F_2(y + 2x) - \frac{1}{10} e^{2x+3y} - \frac{1}{6}\cos(2x + y) + \frac{1}{24}[6x^2 y - 6xy + 9x^2 - 2x^3 - 12x].$$

பயிற்சி 11·4.

பின்வரும் பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடுகளை முழுவதும் தீர்க்கவும்

(1) $(D^2-4DD'-4D'^2)\,z=0$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x$

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x+2y}$

(5) $(D^2-3DD'+2D'^2)\,z=6e^{x+2y}$

(6) $(D^2-DD'+D'-1)\,z=e^y$

(7) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial x}+3\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z+x^2y=0$

(8) $(D^2-3DD'+2D'^2)\,z=(2+4x)\,e^{x+2y}$

(9) $(D^2-DD'+D')\,z=x^2+y^2$

(10) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(y-1)\,e^x$

(11) $(D^2-D'^2-3D+3D')\,z=e^{x+2y}$

(12) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+9\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12x^2+36xy$

(13) $(D^2+DD'-6D'^2)\,z+y\cos x$

(14) $(D^2+DD'+D'-1)\,z=\sin(x+2y)$

(15) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\tan^3 x\tan y-\tan x\tan^3 y$

விடைகள்

(1) $z=F_1(y+2x)+x\,F_2(y+2x)$

(2) $z=F_1(y+ax)+F_2(y-ax)+\dfrac{1}{6}x^3$

(3) $z=F_1(y+ax)+F_2(y-ax)+\dfrac{x^5}{60}$

(4) $z = F_1(y+x) + xF_2(y+x) + e^{x+2y}$

(5) $z = F_1(y+x) + F^2(y+2x) + 2e^{x+2y}$

(6) $z = e^x F_1(y) + e^{-x} F_2(y+x) - xe^y$

(7) $z = e^x F_1(y-x) + e^{-2x} F_2(y+x)$

$$+ \frac{1}{2}\left[x^2y + xy + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y + 3x + \frac{21}{4}\right]$$

(8) $z = F_1(y+2x) + F_2(y+x) + \frac{e^{x+2y}}{3}(12x+22)$

(9) $z = F_1(y) + e^{-x} F_1(y+x) + \frac{x^3}{3} + xy^2$

$$- x^2 + 2xy + 4x$$

(10) $z = F_1(y+2x) + F_2(y-x) + ye^x$

(11) $z = F_1(y+y) + e^{3x} F_2(y-x) - xe^{x+2y}$

(12) $z = F_1(y+3x) + xF_2(y+3x)$

(13) $z = F_1(y+2x) + F_2(y-3x) + \sin x - y\cos x$

(14) $z = e^x F_1(y-x) + e^{-x} F_2(y)$

$$- \frac{1}{10}[\cos(x+2y) + 2\sin(x+2y)]$$

(15) $z = F_1(y+x) + F_2(y-x) + \frac{1}{2}\tan x \tan y.$

12. ஃபூரியர் தொடர்

(Fourier Series)

12·1 திரிகோணமிதித் தொடர் (Trigonometric Series)

பின்வரும் வடிவில் உள்ள ஒரு தொடர் திரிகோணமிதித் தொடர் எனப்படும்.

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

அதாவது $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

இங்கு $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ என்ற மாறிலிகள் (Constants) திரிகோணமிதித் தொடரின் கெழுக்களாகும்.

இது ஒரு குவிதொடரெனின் (convergent series), இதன் கூட்டுத்தொகை ஒரு திரும்புச்சார்பு $f(x)$ [periodic function]க்குச் சமமாகும்.

12-2. சில வரையறுத்தத் தொகைகள் (Some Definite Integrals)

m, n கூட்டு முழு எண்களெனின்

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx, \quad m \neq n$

$$= 2\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin(m-n)x}{(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{\pi}$$

$$= 0.$$

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx \qquad m \neq n$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi}$$

$$= 0.$$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx$

$$= \int_0^{\pi} (1-\cos 2nx)\, dx = \left[x - \sin\frac{2nx}{2n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi$$

(iv) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = 2 \int_{0}^{\pi} (1+\cos 2nx)\, dx$

$$= \left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^{\pi} = \pi$$

(v) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0, \qquad m \neq n$

(vi) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0$

(vii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0$

12-3. ஃபூரியர் விரிவு (Fourier's Expansion)

$F(x)$ எனும் சார்பு $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதெனவும், அது திரிகோணமிதித் தொடராக விரிவுப் படுத்தப்படக்கூடும் எனவும் கொள்வோம்.

அதாவது,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \ldots \quad (1)$$

$f(x)$-ன் தொகை (Integral), வலது பக்கத்திலுள்ள தொகைகளின் கூட்டுப் பலன் (sum) எனக் கொள்வோமெனின், திரிகோண மிதித் தொடரின் கெழுக்களால் அமையும் தொடர் ஓர் அற ஒருங்குத் தொடராக இருத்தல் வேண்டும். அவ்வாறெனின், வலது பக்கத்திலுள்ள உறுப்புகளுக்கு ஒவ்வொன்றாக $(-\pi, \pi)$ இடை வெளியில் தொகை காண முடியும்.

சமன்பாடு (1)-ன் இரு பக்கமும் $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் தொகை காணின்,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\,dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_n \cos nx\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\,[x]_{-\pi}^{\pi} \quad \text{(மற்ற தொகைகள் பூச்சியமாகும்)}$$

$$= a_0\,\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

சமன்பாடு (1)-ன் இரு பக்கமும் $\cos nx$ ஆல் பெருக்கி $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் தொகை காணின்,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx$$

(மற்ற தொகைகள் பூச்சியமாகும்)

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2}\,dx$$

$$= a_n \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= a_n \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= a_n\,\pi.$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

மீண்டும் சமன்பாடு (1)-ன் இருபக்கமும் sin nx ஆல், பெருக்கி ($-\pi$, π) இடைவெளியில் தொகை காணின்,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx$$

(மற்ற தொகைகள் பூச்சியமாகும்)

$$= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \, dx$$

$$= b_n \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= b_n \pi.$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

எனவே, a_0, a_n, b_n-ன் மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்கு

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

வலப்புறம் உள்ளது $f(x)$-ன் ஃபூரியர் தொடர் எனப்படும். b_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) முதலிய மாறிலிகள் பூரியர் கெழுக்கள் (Fourier Coefficients) எனக் கூறப்படும்.

12-4. ஃபூரியர் தொடரில் விரிவுபடுத்த சில கட்டுப்பாடுகள்

(1) x-ன் முழு எண் மடங்குகளில் சைன், கொசைன் கொண்ட தொடராக இருத்தல் வேண்டும்.

(2) $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் சீராக ஒருங்கவேண்டும். (uniformly convergent).

(3) $f(x)$ ஒரு மதிப்புடைய சார்பாக இருக்க வேண்டும்.

(4) $x = a$ எனும் ஒரு தொடர்ச்சியற்ற புள்ளியில் (point of discontinuity), ஃபூரியர் தொடரின் மதிப்பு $\frac{1}{2}[f(a+0)+f(a-0)]$

(5) $f(x)$, குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் முடிவுள்ள தொடர்ச்சியின்மை புள்ளிகள் (Finite number of discontinuity) தான் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

மாதிரி 1 :

$(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில்,

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right]$$

என நிறுவுக.

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x \sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos dx\, nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-n \cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x \cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} \left(\because \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\pi \cos n\pi}{n}\right]$$

$$= -\frac{2}{n} \cos n\pi$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

$$\therefore \quad x = \frac{a_0}{1} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \sin nx$$

$$= 2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots \right]$$

குறிப்பு : $x = \pm \pi$ எனின், தொடரின் மதிப்பு பூச்சியமாம்.

மாதிரி 2 :

$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ இடைவெளியில்

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots \right)$$

என நிறுவுக.

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3\pi} \left[x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} .$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, d\left(\frac{\sin nx}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, . \, 2x \, dx \right]$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, d\left(-\frac{\cos nx}{n} \right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left[\left(-\frac{x \cos nx}{n} \right)_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \left(\because \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0 \right)$$

$$= \frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2} \, .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-x^2 d \cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-\pi^2 \cos n\pi}{n} + \frac{\pi^2 \cos n\pi}{n}\right) + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}\left(\frac{x \sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}\left(\frac{\pi \sin n\pi}{n} - \frac{\pi \sin n\pi}{\pi}\right) + \frac{2}{n^2}\left(\frac{\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{n^3 \pi} [\cos n\pi - \cos n\pi] = 0$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cos nx$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right]$$

குறிப்பு :

$x = \pi$ எனின்,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos\pi}{1^2} - \frac{\cos 2\pi}{2^2} + \frac{\cos 3\pi}{3^2} - \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi^2}{3} = 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

அதாவது $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

$x = -\pi$ எனின்,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos(-\pi)}{1^2} - \frac{\cos(-2\pi)}{2^2} + \frac{\cos(-3\pi)}{3^2} - \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos\pi}{1^2} - \frac{\cos 2\pi}{2^2} + \frac{\cos 3\pi}{3^2} - \cdots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left[-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots\cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots\cdots\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

எனவே, $x = \pm\pi$ எனின்

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

மாதிரி 3 :

$$f(x) = -\cos x, \quad (-\pi \leqslant x \leqslant 0)$$
$$= +\cos x, \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

எனின்,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{1\cdot 3}\sin 2x + \frac{4}{3\cdot 5}\sin 4x + \dots\dots\right]$$

என நிறுவுக.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

எனக் கொள்வோம்.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos x\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} +\cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[-\sin x]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}[\sin x]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}[\sin \pi] + \frac{1}{\pi}[\sin \pi]$$

$$= \frac{1}{\pi}\,.\,2\sin \pi$$

$$= 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} - \cos x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} \cos y \cos ny \, dy + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos x \cos nx \, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos x \cos nx \, dx$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} - \cos x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos x \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} [\sin (n+1) x + \sin (n-1) x] \, dx$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [\sin (n+1) x + \sin (n-1) x] \, dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{- \cos (n+1) x}{n+1} - \frac{\cos (n-1) x}{n-1} \right]_{-\pi}^{0}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{- \cos (n+1) x}{n+1} - \frac{\cos (n-1) x}{n-1} \right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}-\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n-1}-\frac{2\cos(n+1)\pi}{n+1}-\frac{2\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}-\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2n}{n^2-1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2n}{n^2-1}-(-1)^{n+1}\frac{2n}{n^2-1}\right]$$

$$= \frac{2n}{(n^2-1)\pi}\left[1-(-1)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{2n}{(n^2-1)\pi}\left[1+(-1)^{n}\right].$$

எனவே, n இரட்டை எண் எனின் $b_n = \frac{4n}{(n^2-1)\pi}$; n ஒற்றை எண் எனின் $b_n = 0$.

அதாவது,

$$b_1 = b_3 = b_5 = \dots \dots \dots \dots = 0.$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2-1)\pi} [1 + (-1)^n] \sin nx$$

$$= \sum \frac{4}{\pi} \left[\frac{n}{(n+1)(n-1)\pi} \sin nx \right], (n=2m)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\frac{2}{1 \cdot 3} \sin 2x + \frac{4}{3 \cdot 5} \sin 4x + \dots \dots \right].$$

மாதிரி 4 :

$-\pi < x < \pi$ இடைவெளியில்

$f(x) = \frac{\pi}{2 \sinh \pi} e^x$ எனின்,

$f(x)$-ன் ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi-}^{\pi} \frac{\pi}{2 \sinh \pi} e^x\, dx$$

$$= \frac{1}{2 \sinh \pi} [e^x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2 \sinh \pi} [e^{\pi} - e^{-\pi}]$$

$$= \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2\sinh\pi} e^x . \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sinh\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sinh\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\cos nx + n\sin nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{(1+n^2)\, 2\sinh\pi}\Big[e^{\pi}(\cos n\pi + n\sin n\pi) - e^{-\pi}(\cos n\pi - n\sin n\pi)\Big]$$

$$= \frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)\cos n\pi}{(1+n^2)\, 2\sinh\pi} \qquad (\because \sin n\pi = 0)$$

$$= \frac{(-1)^n\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{(1+n^2)\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)} = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{2\sinh\pi} e^x \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sinh\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2 \sinh \pi} \left[\frac{e^x}{1+n^2} (\sin nx - n \cos nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}} \left[\frac{e^{\pi}}{1+n^2} (\sin n\pi - n \cos n) - \frac{e^{-\pi}}{1+n^2} (-\sin n\pi - n \cos n\pi) \right]$$

$$= \frac{1}{(1+n^2)(e^{\pi} - e^{-\pi})} [- e^{\pi} n \cos n\pi + e^{-\pi} n \cos n\pi]$$

$$= \frac{-n \cos n\pi (e^{\pi} - e^{-\pi})}{(1+n^2)(e^{\pi} - e^{-\pi})}$$

$$= - \frac{n \cos n\pi}{1+n^2} = - \frac{n(-1)^n}{1+n^n}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx - \frac{(-1)^n}{1+n^2} \sin nx \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} (-1)^n [\cos nx - \sin nx]$$

$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{5} (\cos 2x - \sin 2x) - \frac{1}{10} (\cos 3x - \sin 3x) + \dots \right]$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{5} (\cos 2x - \sin 2x) + \dots$$

குறிப்பு : தொடர்ச்சியின்மை புள்ளிகளில், தொடரின் கூட்டுப் பலன் வலது, இடது எல்லைகளின் கூட்டிடை (arithmetic mean) யாகும்.

$x = \pm \pi$ எனின்,

$$f(x) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2 \sinh \pi} (e^{-\pi} + e^{\pi})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2 \sinh \pi} \cdot 2 \cosh \pi$$

$$= \frac{1}{2} \coth \pi.$$

மாதிரி 5 :

$$f(x) = (\pi+x), \quad \left(-\pi < x < -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (\pi-x), \quad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$$

எனின், $f(x)$-ன் பூரியர் தொடர் காண்க.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} f(x)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\, dx$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2}(\pi + x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi x + \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \frac{\pi}{2\pi}\left[x\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \frac{1}{\pi}\left[\pi - x\ \frac{x^2}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{8} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{\pi}\left[\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right] = \frac{3\pi}{4}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} f(x)\cos nx\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}(\pi + x)\cos nx\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{-\pi/2} (\pi+x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi/2} (\pi+x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \left[\left\{(\pi+x)\frac{\sin nx}{n}\right\}_{-\pi}^{-\pi/2} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin nx\,dx\right]$$

$$= \left[\frac{(\pi+x)\sin nx}{n} + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{-\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi.$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos nx\,dx = \frac{\pi}{2}\left[+\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{n} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\ .$$

$$\int_{+\pi/2}^{\pi} (\pi-x)\cos nx\,dx = \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$$

$$= \left\{\frac{(\pi-x)\sin nx}{n}\right\}_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \left[\frac{(\pi-x)\sin nx}{n} - \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n^2}\cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} f(x)\sin nx\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}(\pi+x)\sin nx\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right) + \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin n\pi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\,0\,] = 0.$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

$$= \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)\cos nx$$

$$= \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)\cos nx$$

$$= \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \cdots\right).$$

12-5. ஒற்றை, இரட்டைச் சார்புகளுக்கு ஃபூரியர் தொடர் (Fourier Series for odd and even functions)

$f(-x) = -f(x)$ எனின், $f(x)$ ஒற்றைச் சார்பெனவும், $f(-x) = f(x)$ எனின் $f(x)$ இரட்டைச் சார்பெனவும் கூறப்படும்.

எனவே $f(x)$ ஒற்றைச் சார்பெனின்,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (y = -x)$$

$$= \int_{\pi}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= 0$$

$f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பெனின்,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (y = -x)$$

$$= -\int_{\pi}^{0} f(y)\,dy + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx.$$

மீண்டும், $f(x)$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பெனின் $f(x)\ \cos nx$-ம் ஓர் ஒற்றைச் சார்பேயாகும்.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

$f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பெனின், $f(x) \sin nx$ ஓர் இரட்டைச் சார்பாகும்.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 2 \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

எனவே $f(x)$ எனும் ஒற்றைச் சார்பை ஃபூரியர் தொடராக எழுதினால்,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

$f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பெனின், $f(x) \sin nx$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பாகும், $f(x) \cos nx$ ஓர் இரட்டைச் சார்பாகும்.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

எனவே $f(x)$ எனும் இரட்டைச் சார்பை ஃபூரியர் தொடராக எழுதினால்,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = 0.$$

மேலும் பூரியர் தொடர், $f(x)$ ஒற்றைச் சார்பெனின் சைன் தொடராகவும் (Sine Series), $f(x)$ இரட்டைச் சார்பெனின் கொசைன் தொடராகவும் (Cosine series) இருக்கும்.

மாதிரி 6 :

$(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் $x \sin x$ என்ற சார்பின் ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

$$x \sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

$x \sin x$ ஓர் இரட்டைச் சார்பாதலின் அதன் ஃபூரியர் விரிவு கொசைன் தொடராகத்தான் இருக்கும்.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, d(-\cos x)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\, d(-\cos x)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(-x \cos x)_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} [-x \cos x + \sin x]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} [-\pi \cos \pi]$$

$$= \frac{2}{\pi} (\pi) = 2.$$

$\therefore \quad a_0 = 2.$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin x \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{x [\sin (n+1) x - \sin (n-1) x]}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x \sin (n+1) x \, dx - \int_0^{\pi} x \sin (n-1) x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x \cos (n+1) x}{n+1} + \frac{\sin (n+1) x}{(n+1)^2}\right]_0^{\pi}$$

$$- \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x \cos (n-1) x}{n-1} + \frac{\sin (n-1) x}{(n-1)^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi (-1)^{n+1}}{n+1}\right] - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi (-1)^{n-1}}{n-1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1}$$

$$= \frac{(-1)^n (n-1) - (-1)^n (n+1)}{n^2-1} = \frac{-(-1)^n 2}{n^2-1}.$$

$$\therefore a_n = \frac{-2 (-1)^n}{(n+1)(n-1)}.$$

$n = 1$ எனின் $a_1 = \infty$ ஆகும்.

$$\text{எனவே } a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x \sin 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad a_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\sin nx\, dx$$

$= 0$ [$\because$ $x \sin x \sin nx$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு]

$$\therefore \quad x\sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\cos nx$$

$$= \frac{2}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \sum \frac{2(-1)^{n+1}}{(n+1)(n-1)}\cos nx$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x + \frac{2}{2\cdot 4}\cos 3x \ldots$$

குறிப்பு : $x = \frac{\pi}{2}$ எனின்,

$$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1\cdot 3}\cos\pi + \frac{2}{2\cdot 4}\cos\frac{3\pi}{2} \quad \ldots \ldots$$

$$= 1 - 0 - \frac{2}{1\cdot 3}(-1) + \frac{2}{2\cdot 4}(0) - \frac{2}{3\cdot 5} \dots (1)$$

$$= 1 + \frac{2}{1\cdot 3} - \frac{2}{3\cdot 5} + \dots$$

அதாவது $\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{1\cdot 3} - \frac{2}{3\cdot 5} + \dots$

எனவே, $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \dots \dots$

மாதிரி 7 :

p முழு எண்ணும் அல்ல பூச்சியமுமல்ல எனின், $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் $\sin px$ என்ற சார்புக்கு ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin px\, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cos nx\, dx$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin px \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\cos (p-n)x - \cos (p+n)x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} [\cos (p-n)x - \cos (p+n)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (p-n)x}{p-n} - \frac{\sin (p+n)x}{p+n} \right]_{0}^{\pi}$$

p ஒரு முழு எண் அல்ல ஆதலின், $\sin p\pi \neq 0$

n ஒரு முழு எண் ஆதலின், $\sin n\pi = 0$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (p-n)x}{p-n} - \frac{\sin (p+n)x}{p+n} \right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin px \cos nx - \sin nx \cos px}{p-n} \right]_{0}^{\pi}$$

$$- \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin px \cos nx + \sin nx \cos px}{p+n} \right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin p\pi \cos n\pi}{p-n} - \frac{\sin p\pi \cos n\pi}{p+n} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2n}{p^2 - n^2} \cdot \sin p\pi \cos n\pi$$

$$= \frac{2n}{(p^2 - n^2)\pi} (-1)^n \sin p\pi$$

$$\therefore \quad b_1 = \frac{2}{\pi} \sin p\pi \cdot \frac{1}{1^2 - p^2}$$

$$b_2 = \frac{4 \sin p\pi}{(p^2 - 2^2)\pi} = -\frac{2}{\pi} \sin p\pi \cdot \frac{2}{2^2 - p^2}$$

$$b_3 = \frac{-6 \sin p\pi}{(p^2 - 3^2)\pi} = \frac{2}{\pi} \sin p\pi \cdot \frac{3}{3^2 - p^2}, \ \ldots$$

$$\therefore \quad \sin px = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin p\pi \cdot \frac{2}{1^2 - p^2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sin p\pi \cdot \frac{2}{2^2 - p^2} \sin 2x$$
$$+ \frac{2}{\pi} \sin p\pi \cdot \frac{3}{3^2 - p^2} \sin 3x - \ldots$$

$$= \frac{2}{\pi} \sin p\pi \left[\frac{1}{1^2 - p^2} \sin x - \frac{2}{2^2 - p^2} \sin 2x + \frac{3}{3^2 - p^2} \sin 3x - \ldots \right].$$

மாதிரி 8 :

$$f(x) = -x, \quad (-\pi < x < 0)$$
$$= x, \quad (0 < x < \pi)$$

எனின், $(-\pi, \pi)$ இடைவெளியில் $f(x)$ ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

எனக் கொள்வோம்.

(x) ஓர் இரட்டைச் சார்பாதலின்,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \quad dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} - x \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(- \frac{x^2}{2} \right)_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right)_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right] = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi n^2}\,[\cos n\pi - 1]$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi}\,[(-1)^n - 1].$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\,[(-1)^n - 1] \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left[-\frac{2}{1^2} \cos x - \frac{2}{3^2} \cos 3x - \frac{2}{5^2} \cos 5x - \dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\dots\right]$$

குறிப்பு :

$x = 0$ எனின் $f(x) = 0$.

$$\therefore \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\dots\right]$$

$$\therefore \quad \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\dots\right] = \frac{\pi}{2}$$

அதாவது,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

12-6. அரை இடைவெளித்தொடர் (0, π) (Half-range Series)

அரை இடைவெளி (0, π)-ல் $f(x)$ என்ற சார்பைக் கொசைன்கள் அல்லது சைன்கள் மட்டும் கொண்ட ஃபூரியர் தொடராக விரிவு படுத்தலாம்.

கொசைன் தொடர் (Cosine Series)

(0, π) இடைவெளியில்

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

(1)-ன் இரு பக்கமும் (0, π) இடைவெளியில் தொகை காணின்,

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \int_0^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{1}^{\infty} \int_0^{\pi} a_n \cos nx\, dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\Big[\, x \,\Big]_0^{\pi} \quad \left(\because \sum \int_0^{\pi} a_n \cos nx\, dx = 0\right)$$

$$= \frac{a_0 \pi}{2}$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

(1)-ன் இருபக்கமும் cos nx ஆல் பெருக்கி. $(0, \pi)$ இடைவெளியில் தொகை காணின்.

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\pi} a_n \cos nx, \cos nx \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} a_n \cos^2 nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2} a_n \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\, nx) \, dx$$

$$= a_n 2 \left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{a_n}{2} \pi$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

a_0, a_n மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிடின்,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \sum_1^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right] \cos nx$$

குறிப்பு :

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)], \quad (0 < x < \pi]$$

$$= f(0), \qquad (x = 0)$$

$$= f(\pi - 0), \quad (x = \pi)$$

சைன் தொடர் (Sine Series)

$(0, \pi)$ இடைவெளியில்,

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

எனக் கொள்வோம்.

இரு பக்கமும் $\sin nx$ ஆல் பெருக்கி $(0, \pi)$ இடைவெளியில் தொகை காணின்,

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} b_n \sin nx \cdot \sin nx \, dx$$

$$= b_n \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx$$

$$= \frac{b_n}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx$$

$$= \frac{b_n}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{b_n}{2} \left[\pi - \frac{\sin 2n\pi}{2n} \right]$$

$$= \frac{\pi b_n}{2}.$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

$$\therefore \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right] \sin nx.$$

குறிப்பு : $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],\ (0 < x < \pi)$

$= 0,\ (x = 0$ அல்லது $\pi)$

மாதிரி 9 :

$$f(x) = x, \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (\pi - x), \quad \left(\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi\right)$$

எனும் சார்பை சைன் தொடராகவும் (Sine series), கோசைன் தொடராகவும் (Cosine series) விரித்தெழுதவும்.

முதலில் $f(x)$ ஐ சைன் தொடராக விரித்தெழுதுவோம்.

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

$$= \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} f(x) \sin nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x \sin nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\, d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left[\frac{-(\pi - x)\cos nx}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

n இரட்டை எண் எனின், $b_n = 0$

$$b_1 = \frac{4}{\pi \cdot 1^2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{1^2}$$

$$b_3 = \frac{4}{\pi \cdot 3^2}\sin\frac{3\pi}{2} = \frac{-4}{\pi}\cdot\frac{1}{3^2}$$

$$b_5 = \frac{4}{\pi \cdot 5^2}\sin\frac{5\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5^2}, \dots\dots\dots$$

எனவே,

$$f(x) = b_1\sin x + b_3\sin 3x + b_5\sin 5x + \dots\dots\dots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x \dots\dots\right]$$

இனி $f(x)$-ஐ கொசைன் தொடராக விரித்தெழுதுவோம்.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x\, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{x^2}{2} \right)_0^{\pi/2} + \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right)_{\pi/2}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{8} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{8} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\pi^2}{8} \right] = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos nx\, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x d\left(\frac{\sin nx}{n} \right)$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\, d\left(\frac{\sin nx}{n} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi - x)\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right]$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\{1 + (-1)^n\}\right]$$

எனவே, n ஒற்றை எண் எனின், $a_n = 0$ n இரட்டை எண் எனின்,

$$a_2 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2^2}(-1) - \frac{1}{2\cdot 2^2}(2)\right] = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{2^2}.$$

$$a_4 = 0$$

$$a_6 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{6^2}(-1) - \frac{1}{2\cdot 6}(2)\right] = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{6^2}.$$

$$a_8 = 0, \ldots$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{a_0}{2} + a_2\cos 2x + a_6\cos 6x + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{2^2}\cos 2x - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2}{6^2}\cos 6x\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \cdots\right)$$

மாதிரி 10 :

$$f(x) = x, \quad 0 < x < c$$
$$= c, \quad c < x < \pi - c$$
$$= \pi - x, \quad \pi - c < x < \pi$$

எனின்,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin c \sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3c \sin 3x + \dots\right]$$

என நிறுவுக.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{எனக் கொள்வோம்.}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{c} x \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_c^{\pi-c} c \sin nx\, dx$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\pi-c}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{c} x\, d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) + c\int_c^{\pi-c} \sin nx\, dx\right.$$

$$\left. + \int_{\pi-c}^{\pi} (\pi - x)\, d\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)_0^{c} + c\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)_c^{\pi-c}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{-(\pi - x)\cos nx}{n^2} - \frac{\sin nx}{n^2}\right)_{\pi-c}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{-c\cos nc}{n} + \frac{\sin nc}{n^2}\right) + c\left(\frac{-\cos n(\pi-c)}{n}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\cos nc}{n}\right) + \left(-\frac{\sin n\pi}{n^2} + \frac{c\cos n(\pi-c)}{n} + \frac{\sin n(\pi-c)}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nc}{n^2} + \frac{\sin n(\pi-c)}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\sin nc + \sin n\pi\cos nc - \cos n\pi\sin nc\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\sin nc - \sin nc\cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2\sin nc}{n^2\pi}\left[1 - \cos n\pi\right]$$

$$\therefore \quad b_1 = \frac{2}{\pi . 1^2}\sin c\,(1-\cos\pi) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\sin c}{1^2}$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi . 2^2}\sin 2c\,(1-\cos 2\pi) = 0$$

$$b_3 = \frac{2}{\pi . 3^2}\sin 3c\,(1-\cos 3\pi) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\sin 3c}{3^2}$$

$$b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\sin 5c}{5^2}, \ \ldots$$

$$\therefore \quad f(x) = b_1\sin x + b_3\sin 3x + b_5\sin 5x + \ldots$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{2\sin c}{1^2}\sin x + \frac{2\sin 3c}{3^2}\sin 3x + \frac{2\sin 5c}{5^2}\sin 5x + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin c\,.\,\sin x}{1^2} + \frac{\sin 3c\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5c\sin 5x}{5^2} + \ldots\right]$$

மாதிரி 11 :

$f(\theta) = \cos\theta,\quad (0 < \theta < \pi)$ எனின்.

$$\cos = \frac{4}{\pi}\left[\frac{2\sin 2\theta}{2^2-1} + \frac{4\sin 4\theta}{4^2-1} + \frac{6\sin 6\theta}{6^2-1} + \cdots\right]$$

என நிறுவுக.

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta \sin n\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)\pi}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2n}{n^2-1} + (-1)^n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2n}{n^2-1} + (-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\right]$$

$$= \frac{2n}{(n^2-1)\pi}[1 + (-1)^n]$$

n ஒற்றை எண் எனின், $b_n = 0$

அதாவது, $b_1 = = b_3 = b_5 = \ldots = 0$.

n இரட்டை எண் எனின்,

$$b_2 = \frac{4}{(2^2 - 1)\pi}(2) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2}{2^2 - 1}$$

$$b_4 = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{2}{4^2 - 1}, \quad b_6 = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{6^2 - 1}, \quad \ldots$$

$$\therefore \quad f(\theta) = b_2 \sin 2\theta + b_4 \sin 4\theta + b_6 \sin 6\theta + \ldots$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{2}{2^2 - 1} \cdot \sin 2\theta + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{2}{4^2 - 1} \sin 4\theta + \frac{12}{\pi} \cdot \frac{2}{6^2 - 1} \sin 6\theta + \ldots$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{2 \sin 2\theta}{2^2 - 1} + \frac{4 \sin 4\theta}{4^2 - 1} + \frac{6 \sin 6\theta}{6^2 - 1} + \ldots\right].$$

மாதிரி 12 :

$$f(x) = 0, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = c, \qquad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \quad \text{எனின்}$$

$$f(x) = \frac{2c}{\pi}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} + \ldots\right]$$

என நிறுவுக.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

எனக் கொள்வோம்.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} 0 \cdot dx + \int_{\pi/2}^{\pi} c\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot c\Big[x\Big]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{2c}{\pi}\left[\pi - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{2c}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= c$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} f(x)\cos nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\right]$$

$$= \frac{2c}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2c}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{2c}{n\pi}\left[\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= -\frac{2c}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore \quad a_1 = \frac{-2c}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{2c}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{-2c}{2\pi}\sin\pi = 0$$

$$a_3 = \frac{-2c}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} = \frac{2c}{3\pi}$$

$$a_4 = \frac{-2c}{4\pi} \sin 2\pi = 0$$

$$a_5 = \frac{-2c}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} = \frac{-2c}{5\pi}.$$

$$a_6 = 0, \dots \dots \dots$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} \; a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \dots\dots$$

$$= \frac{c}{2} + \left[\frac{-2c}{\pi} \cos x + \frac{2c}{3\pi} \cos 3x - \frac{2c}{5\pi} \cos 5x + \dots \dots \right]$$

$$= \frac{c}{2} - \frac{2c}{\pi} \left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right]$$

$$= \frac{2c}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right]$$

பயிற்சி 12.1

(1) $y = x \cos x, \quad (-\pi < x < \pi)$ எனின்,

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n}{(n-1)(n+1)} \sin nx$$

என நிறுவுக.

(2) $f(\theta) = \cos n\theta, \quad (-\pi < \theta < \pi)$ எனின்,

$$\cos n\theta = \frac{2}{\pi} \sin n\pi \left[\frac{1}{2n} + \frac{n \cos \theta}{1^2 - n^2} - \frac{n \cos 2\theta}{2^2 - n^2} + \frac{n \cos 3\theta}{3^2 - n^2} + \dots \right]$$ என நிறுவுக.

(3) $f(\theta) = 0, \quad (-\pi < \theta < 0)$

$$= \frac{\pi\theta}{4} \quad (0 < \theta < \pi)$$ எனின்,

$f(\theta)$-ன் ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

(4) $f(x) = x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$

$= 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

எனின்,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right] + 3\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right]$$

என நிறுவுக.

(5) $f(y) = -\frac{\pi + y}{2}, \quad -\pi \leqslant y < 0$

$= \frac{\pi - y}{2}, \quad 0 \leqslant y < \pi$

எனின், $f(x)$-ன் ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

(6) $f(\theta) = \theta + \theta^2, (-\pi < \theta < \pi)$ எனின்

$$f(\theta) \ \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\cos n\theta}{n^2} - \frac{\sin n\theta}{2n}\right]$$

என நிறுவுக.

(7) $y = \frac{\theta(\pi^2 - \theta^2)}{12}, (-\pi < \theta \ \pi)$ எனின்.

$y = \frac{\sin \theta}{1^3} - \frac{\sin 2\theta}{2^3} + \frac{\sin 3\theta}{3^3} - \dots \dots$ என நிறுவுக.

(8) $y = \frac{\pi x(\pi - x)}{8}, \quad (0 < x < \pi)$ எனின்,

$y = \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\dots\dots$ என நிறுவுக.

(9) $f(\theta) = (\pi\theta - \theta^2), \quad (0 < \theta < \pi)$ எனின்.

$(\pi\theta - \theta^2)$-ஐ சைன் தொடராக விரித்தெழுதுக.

(10) $f(x) = x, \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ எனின்,

$$f(x)\ 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right]$$

என நிறுவுக.

(11) $f(\theta) = \frac{1}{3}\pi, \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$

$$= 0. \quad \left(\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\pi, \left(\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi\right)$$ எனின்,

$$f(\theta) = \sin 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{1}{4}\sin 8\theta + \ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

(12) $f(x) = x(2\pi - x), \quad (0 < x < 2\pi)$ எனின்,

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\ldots\right)$$ என நிறுவுக

(13) $y = e^{\theta}, \quad (0 < \theta < 2\pi)$ எனின்,

$$e^{\theta} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{1^2+1} + \frac{\cos 2x}{2^2+1} + \frac{\cos 3x}{3^2+1} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$-\left(\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}\right)\left[\frac{\sin x}{1^2+1} + \frac{2\sin 2x}{2^2+1} + \frac{3\sin 3x}{3^2+1} + \ldots\ldots\ldots\right]$$

என நிறுவுக

(14) $(0, \pi)$ இடைவெளியில் $\cos 2\theta$-ன் ஃபூரியர் தொடர்

$$-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin\theta}{2^2-1}+\frac{3\sin 3\theta}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5\theta}{2^2-5^2}+\dots\right]$$

என நிறுவுக.

(15) $f(x) = \sin x, \quad (0 < x < \pi)$

$= 0 \qquad (\pi < x < 2\pi)$ எனின்,

$f(x)$-ன் ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

விடைகள்

(3) $$\frac{\pi^2}{16}+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{4n^2}\cos nx-\frac{(-1)^n\pi}{4n}\sin nx\right]$$

(5) $$f(y) = \sin y+\frac{\sin 2y}{2}+\frac{\sin 3y}{3}+\dots$$

(9) $$f(\theta) = \frac{8}{\pi}\left[\sin\theta+\frac{1}{3^2}\sin 3\theta+\frac{1}{5^2}\sin 5\theta+\dots\right]$$

(15) $$f(x) = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1.3}+\frac{\cos 4x}{3.5}+\dots\right].$$

12-7. இடைவெளி மாற்றம் (Change of Interval)

fx எனும் சார்பை $(-l, l)$ இடைவெளியில் ஃபூரியர் தொடராக விரிவுபடுத்த,

$$y = \frac{\pi x}{l}$$

அதாவது $x = \dfrac{ly}{\pi}$

எனக்கொள்வோம். (l ஒரு மெய்யெண்)

$x = -l$ எனின் $y = -\pi$

$x = l$ எனின் $y = \pi$ என்றாகும்.

எனவே $f(x) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$

$= f(y)$ (என்க)

$$\therefore \quad F(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{0} f(x)\, \frac{\pi}{l}\, dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) \cos ny\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \cos ny\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l}\, x\right) \frac{\pi}{l}\, dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l}\, x\, dx.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) \sin ny \, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right) \sin ny \, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \cdot \frac{\pi}{l} \, dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

12-8. $2l$ நீளமுள்ள இடைவெளியில் ஒற்றை, இரட்டைச் சார்புகளின் ஃபூரியர் தொடர்

$f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பெனின், இது சைன் உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட ஃபூரியர் தொடராக விரிவுபடுத்தப்படக் கூடும்.

அதாவது $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$

இங்கு, $b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x.$

$f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பெனின், இது கொசைன் உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட ஃபூரியர் தொடராக விரிவு படுத்தப் படக் கூடும்.

அதாவது, $f(x) = \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x.$

இங்கு, $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\, dx$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\, dx.$$

12-9. $(0, l)$ இடைவெளியில் ஃபூரியர் தொடர்

சைன் தொடர் :

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

இங்கு, $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x\, dx$

கொசைன் தொடர் :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

இங்கு. $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)\, dx$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\, dx.$$

12-10. (α, β) இடை வெளியில் $f(x)$-ன் ஃபூரியர் தொடர்

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{\beta - \alpha} x + b_n \sin \frac{2n\pi}{\beta - \alpha} x \right]$$

இங்கு, $$a_0 = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2n\pi}{\beta - \alpha} x \,.\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2n\pi}{\beta - \alpha} x\, dx$$

மாதிரி 13 :

$$f(x) = 0, \qquad (0 < x < \lambda)$$
$$= l, \qquad (\lambda < x < 2\lambda)$$

எனின்,

$$f(x) = \frac{l}{2} - \frac{2l}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\lambda} + \cdots \right)$$

என நிறுவுக.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{\lambda} x + b_n \sin \frac{n\pi}{\lambda} x \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\lambda} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x)\, dx + \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} l \, dx$$

$$= \frac{l}{\lambda} \Big[x \Big]_{\lambda}^{2\lambda} = \frac{l}{\lambda} \Big[\lambda \Big]$$

$$= l.$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{2\lambda} f(x) \cos \frac{n\pi}{\lambda} x \, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} l \cos \frac{n\pi}{\lambda} x \, dx$$

$$= \frac{l}{\lambda} \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{\lambda} x}{\frac{n\pi}{\lambda}} \right]_{\lambda}^{2\lambda}$$

$$= \frac{l}{n\pi} [\sin 2n\pi - \sin n\pi]$$

$$= 0.$$

$$\therefore \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{2\lambda} f(x) \sin \frac{n\pi}{\lambda} x \, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} l \sin \frac{n\pi}{\lambda} x \, dx$$

$$= \frac{l}{\lambda} \left[\frac{-\cos \frac{n\pi}{\lambda} x}{\frac{n\pi}{\lambda}} \right]_{\lambda}^{2\lambda}$$

$$= \frac{l}{n\pi}\left[-\cos 2n\pi + \cos n\pi\right]$$

$$= \frac{l}{n\pi}\left[-1 + (-1)^n\right].$$

n இரட்டை எண் எனின் $b_n = 0$

அதாவது $b_2 = b_4 = b_6 + \ldots = 0.$

n ஒற்றை எண் எனின் , $b_n = -\frac{2l}{n\pi}$

$$\therefore \quad b_1 = \frac{-2l}{\pi},\ b_3 = \frac{-2l}{3\pi},\ b_5 = \frac{-2l}{5\pi}, \ldots$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin\frac{\pi}{\lambda}x + b_3 \sin\frac{3\pi}{\lambda}x + \ldots$$

$$= \frac{l}{2} + \left[-\frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi}{\lambda}x - \frac{2l}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{\lambda}x + \ldots\right]$$

$$= \frac{l}{2} - \frac{2l}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}x\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{\lambda}x\right) + \ldots\right]$$

மாதிரி 14 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda, \ (-2\lambda < x < -\lambda) \\ &= -x, \ (-\lambda < x < 0) \\ &= x, \ (0 < x < \lambda) \\ &= \lambda, \ (\lambda < x < 2\lambda), \end{aligned}$$

எனின் $f(x)$-ன் ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

இடைவெளி $(-2\lambda, 2\lambda)$ ஆதலின்

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi}{2\lambda}x + b_n \sin\frac{n\pi}{2\lambda}x\right]$$

எனக்கொள்வோம்.

$$a_0 = \frac{1}{2\lambda} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \left[\int_{-2\lambda}^{-\lambda} \lambda\, dx + \int_{-\lambda}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{\lambda} x\, dx + \int_{\lambda}^{2\lambda} \lambda\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \left[\lambda \left(x \right)_{-2\lambda}^{-\lambda} - \left(\frac{x^2}{2} \right)_{-\lambda}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} \right)_{0}^{\lambda} + \lambda \left(x \right)_{\lambda}^{2\lambda} \right]$$

$$= \frac{1}{2\lambda} [\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2] = \frac{3\lambda^2}{3\lambda} = \frac{3}{2}\, \lambda.$$

$$a_n = \frac{1}{2\lambda} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} f(x) \cos \frac{n\pi}{2\lambda} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \left[\int_{-2\lambda}^{-\lambda} \lambda \cos \frac{n\pi}{2\lambda} x\, dx + \int_{-\lambda}^{0} - x \cos \frac{n\pi}{2\lambda} x\, dx + \int_{0}^{\lambda} x \cos \frac{n\pi}{2\lambda} x\, dx + \int_{\lambda}^{2\lambda} \lambda \cos \frac{n\pi}{2\lambda} n\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\left[2\int_0^{\lambda} x \cos\frac{n\pi}{2\lambda} x\,dx + 2\int_{\lambda}^{2\lambda} \lambda \cos\frac{n\pi}{2\lambda} x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\int_0^{\lambda} x\, d\left[\frac{\sin\frac{n\pi x}{2\lambda}}{\frac{n\pi}{2\lambda}}\right] + \lambda\int_{\lambda}^{2\lambda} \cos\frac{n\pi}{2\lambda} x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\left\{\frac{x\,2\lambda}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2\lambda} + \frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2\lambda}\right\}_0^{\lambda} + \left\{\frac{2\lambda^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2\lambda}\right\}_{\lambda}^{2\lambda}\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{2\lambda^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2} - \frac{2\lambda^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{4\lambda}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

$$b_n = \frac{1}{2\lambda}\int_{-2\lambda}^{2\lambda} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2\lambda}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\left[\int_{-2\lambda}^{-\lambda} \lambda \sin \frac{x\pi x}{2\lambda}\, dx + \int_{-\lambda}^{0} - x \sin \frac{n\pi}{2\lambda} x \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\lambda} x \sin \frac{n\pi}{2\lambda} x + \int_{\lambda}^{2\lambda} \lambda \sin \frac{n\pi}{2\lambda} x \right]$$

$$= 0.$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{3}{2}\lambda \; ; \quad a_n = \frac{4\lambda}{n^2\pi^2}\left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right).$$

$$b_n = 0$$

$$\therefore \quad a_1 = -\frac{4\lambda}{\pi^2}, \quad a_2 = -\frac{4\lambda}{\pi^2} \cdot \frac{2}{2^2}$$

$$a_3 = -\frac{4\lambda}{\pi^2} \cdot \frac{1}{3^2}, \quad a_4 = 0,$$

$$a_5 = -\frac{4\lambda}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \quad a_6 = -\frac{4\lambda}{\pi^2} \quad \frac{2}{6^2}, \quad \ldots$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{2\lambda} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{2\lambda}$$

$$+ a_3 \cos \frac{3\pi x}{2\lambda} + a_5 \cos \frac{5\pi x}{2\lambda} + a_6 \cos \frac{6\pi x}{2\lambda} + \ldots$$

$$= \frac{3\lambda}{4} - \frac{4\lambda}{\pi^2}\left[\cos \frac{\pi x}{2\pi} + \frac{2}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{2\lambda}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2\lambda} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2\lambda} + \ldots\right].$$

மாதிரி 15 :

$$f(x) = \frac{\lambda}{4} - x, \left(0 < x < \frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= x - \frac{3}{4}\lambda, \left(\frac{\lambda}{2} < x < \lambda\right)$$ எனின்,

$$f(x) = \frac{2\lambda}{\pi^2}\left[\cos\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{1}{3^2}\cos\frac{6\pi}{\lambda}x + \frac{1}{5^2}\cos\frac{10\pi x}{\lambda} + \cdots\right]$$

என நிறுவுக.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\lambda} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$a_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\int_0^{\lambda/2}\left(\frac{\lambda}{3} - x\right)dx + \int_{\lambda/2}^{\lambda}\left(x - \frac{3}{4}\lambda\right)dx\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\left(\frac{\lambda}{4}x - \frac{x^2}{2}\right)_0^{\lambda/2} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}\lambda x\right)_{\lambda/2}^{\lambda}\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{3\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{8} + \frac{3\lambda^2}{8}\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\lambda^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right)\right]$$

$$= 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\int_0^{\lambda/2}\left(\frac{\lambda - x}{4}\right)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx + \int_{\lambda/2}^{\lambda}\left(x - \frac{3}{4}\lambda\right)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\int_0^{\lambda/2}\left(\frac{\lambda-x}{4}\right)d\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{\lambda}}{\frac{n\pi}{\lambda}}\right)\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda/2}^{\lambda}\left(x-\frac{3}{4}\lambda\right)d\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{\lambda}}{\frac{n\pi}{\pi}}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\left(\frac{\lambda-x}{4}\right)\frac{\lambda}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}-\frac{\lambda^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{\lambda}x\right]_0^{\lambda/2}$$

$$+\frac{2}{\lambda}\left[\left(x+\frac{3}{4}\lambda\right)\frac{\lambda}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\lambda}+\frac{\lambda^2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{\lambda}x\right]_{\lambda/2}^{\lambda}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{\lambda^2}{4n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\lambda^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{\lambda^2}{n^2\pi^2}\right.$$

$$+\frac{\lambda^2}{4n\pi}\sin n\pi+\frac{\lambda^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi+\frac{\lambda^2}{4n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\left.-\frac{\lambda_3}{n^2\pi^2}\frac{\cos n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\lambda^2}{n^2\pi^2}+\frac{\lambda^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{2\lambda^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{n^2\pi^2}\left[1+\cos n\pi-2\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2\lambda}{n^2\pi^2}\left[1+(-1)^n-2\cos\frac{n\pi}{2}\right].$$

$$\therefore\ a_1 = 0,\quad a_2 = \frac{2\lambda}{\pi^2},\quad a_3 = 0,\ a_4 = 0$$

$$a_5 = 0,\quad a_6 = \frac{2\lambda}{\pi^2}\cdot\frac{1}{3^2},\quad a_7 = 0,$$

$$a_8 = 0,\quad a_9 = 0,\quad a_{10} = \frac{2\lambda}{\pi^2}\cdot\frac{1}{5^2}\ \dots.$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{\lambda} x$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x + a_6 \cos \frac{6\pi}{\lambda} x + a_{10} \cos \frac{10\pi}{\lambda} x + \ldots$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi^2} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x + \frac{2\lambda}{\pi^2} \cdot \frac{1}{3^2} \cos \frac{6\pi x}{\lambda} + \frac{2\lambda}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5^2} \cos \frac{10\pi x}{\lambda} + \ldots$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi^2} \left[\cos \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{6\pi x}{\lambda} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{10\pi x}{\lambda} + \ldots \right].$$

மாதிரி 16 :

$f(x) = 2x$ எனின் $(0, 1)$ இடைவெளியில் $f(x)$-ன் ஃபூரியர் தொடர் காண்க.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} \right)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$a_0 = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{1} \int_{0}^{1} 2x\, dx = 2 \left(x^2 \right)_0^1 = 2$$

$$a_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx$$

$$= \frac{2}{1} \int_{0}^{1} 2x \, . \cos 2n\pi x \, dx$$

$$= 4 \int_{0}^{1} x \, d\left(\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right)$$

$$= 4 \left[\frac{x \sin 2n\pi x}{2n\pi} - \int \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi} dx \right]_0^1$$

$$= 4 \left[\frac{x \sin 2n\pi x}{2n\pi} + \frac{\cos 2n\pi x}{4n^2\pi^2} \right]_0^1$$

$$= 4 \left[\frac{\sin 2n\pi}{2n\pi} + \frac{\cos 2n\pi}{4n^2\pi^2} - \frac{1}{4n^2\pi^2} \right]$$

$$= 4 \left[\frac{1}{4n^2\pi^2} - \frac{1}{4n^2\pi^2} \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{\beta - \alpha} dx$$

$$= \frac{2}{1} \int_{0}^{1} 2x \, . \sin 2n\pi x \, dx$$

$$= 4 \int_{0}^{1} x \, d\left[-\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi} \right]$$

$$= 4\left[\left\{\frac{-x\cos 2n\pi x}{2n\pi}\right\}_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\,dx\right]$$

$$= 4\left[\frac{-x\cos 2n\pi x}{2n\pi} + \frac{\sin 2n\pi x}{4n^2\pi^2}\right]_0^1$$

$$= 4\left[-\frac{\cos 2n\pi}{2n\pi} + \frac{\sin 2n\pi}{4n^2\pi^2}\right]$$

$$= 4\left[-\frac{1}{2n\pi}\right] = -\frac{2}{n\pi}.$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty b_n \sin 2n\pi x$$

$$= \frac{a_0}{2} + b_1 \sin 2\pi x + b_2 \sin 4\pi x + b_3 \sin 6\pi x$$

$$= \left[1 - \frac{2}{\pi}\sin 2\pi x - \frac{2}{2\pi}\sin 4\pi x - \frac{2}{3\pi}\sin 6\pi x + \cdots\right]$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \cdots\right]$$

மாதிரி 17 :

$f(x) = e^x$ எனும் சார்பை $(-l, l)$ இடைவெளியில் ஃபூரியர் தொடராக விரித்தெழுதுக.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} e^x\, dx$$

$$= \frac{1}{l} [e^l - e^{-l}]$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\, dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} e^x \cos \frac{n\pi}{l} x\, dx$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{e^x}{1 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \left(\cos \frac{n\pi}{l} x + \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \right) \right]_{-l}^{l}$$

$$\left[\because \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx). \right.$$

$$\left. \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) \right]$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{l^2 e^l}{l^2 + n^2 \pi^2} \left(\cos n\pi + \frac{n\pi}{l} \sin n\pi \right) - \frac{l^2 e^{-l}}{l^2 + n^2 \pi^2} \left(\cos n\pi - \frac{n\pi}{l} \sin n\pi \right) \right]$$

$$= \frac{l}{l^2 + n_2 \pi^2} (e^l - e^{-l}) \cos n\pi.$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{(-1)^n\, l(e^l - e^{-l})}{l^2+n^2\pi^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x\, xd$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^x \sin \frac{n\pi}{l}x\, dx$$

$$= \frac{1}{l}\left[\frac{l^2 e^x}{l^2+n^2\pi^2}\left(\sin \frac{n\pi}{l}x - \frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\right)\right]_{-l}^{l}$$

$$= \frac{l}{l^2+n^2\pi^2}\left[e^l\left(\sin n\pi - \frac{n\pi}{l}\cos n\pi\right) - e^{-l}\left(-\sin n\pi - \frac{n\pi}{l}\cos n\pi\right)\right]$$

$$= \frac{l}{l^2+n^2\pi^2}(el - e^{-l})\left(-\frac{n\pi}{l}\cos n\pi\right)$$

$$= -(-1)^n \frac{n\pi}{l^2+n^2\pi^2}(el - e^{-l})$$

அதாவது $a_0 = \dfrac{el - e^{-l}}{l}$, $a_n = \dfrac{l(el - e^{-l})}{l^2+n^2\pi^2}(-1)^n$

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{n\pi(el - e^{-l})}{l^2+n^2\pi^2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2l}(el - e^{-l}) + \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{l(el - e^{-l})}{l^2+n^2\pi^2}(-1)^n \cos\frac{n\pi}{l}x + \frac{n\pi(el - e^{-l})}{l^2+n^2\pi^2}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]$$

$$= \frac{1}{2l}(e^l - e^{-l}) + l(e^l - e^{-l}) \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{l^2 + n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

$$+\pi(e^l - e^{-l}) \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{l^2 n^2 \pi^2} n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

12–11. இசைப்பகுவியல் (Harmonic Analysis) ;

சார்புகளை ஃபூரியர் தொடராக விரிவுபடுத்துதல் இசைப் பகுவியல் (Harmonic Analysis) எனப்படும்.

2π காலவட்டமுள்ள $f(x)$ எனும் திரும்பு சார்பு (Periodic function) பின் வருமாறு விரிவுபடுத்தக்கூடும் என நாம் அறிவோம்.

அதாவது,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

இங்கு,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dz$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

வழக்கமாக, $f(x)$ எனும் சார்பு அட்டவணை வடிவில் அல்லது ஒரு வளைவு வடிவில் கொடுக்கப்படும். இவ்வகைகளில் ஃபூரியர் கெழுக்கள் தொகை முறைகளில் கண்டு பிடிக்கப்படும். இவ்வாறு ஃபூரியர் கெழுக்களைக் காணுதல் இசைப்பகுவியல் எனப்படும்.

இனி, ∴பூரியர் கெழுக்களைக் காணும் வழிகளைக் காண்போம்.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots\ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots \quad (1)$$

(1)-ன் இருபுறமும் (0, 2π) இடைவெளியில் தொகை காணின்,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{\pi} dx + \sum_1^{\infty} \left[\int_0^{\pi} a_n \cos nx\,dx + \int_0^{\pi} b_n \sin nx\,dx \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} (x)_0^{2\pi} \quad \text{[மற்ற தொகைகள் பூச்சியமாகும்.]}$$

$$= a_0 \pi.$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

அதாவது, $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

எனவே, $\frac{a_0}{2}$-ன் மதிப்பு $f(x)$-ன் சராசரி மதிப்பாகும்.

(1)-ன் இரு பக்கமும் $\cos nx$ ஆல் பெருக்கித் தொகை காணின்,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx = an \int_0^{2\pi} \cos nx \cos nx\,dx$$

(மற்ற தொகைகள் பூச்சியமாகும்.)

$$= a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx$$

$$= \frac{a_n}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2n\,x)\, dx$$

$$= \frac{a_n}{2} \left[x + \frac{\sin 2n\,x}{2n} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a_n}{2} \cdot 2\pi = \pi\, a_n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

எனவே, a_n-ன் மதிப்பு $f(x) \cos nx$-ன் சராசரி மதிப்பின் இரு மடங்காகும்.

இவ்வாறே (1)-ன் இரு பக்கமும் $\sin nx$ ஆல் பெருக்கி $(0, 2\pi)$ இடைவெளியில் தொகை காணின்,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx = b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \sin nx\, dx$$

(மற்ற தொகைகள் பூச்சியமாகும்.)

$$= b_1 \cdot \pi.$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

எனவே, b_n-ன் மதிப்பு $f(x) \sin nx$-ன் சராசரி மதிப்பின் இரு மடங்காகும்.

மாதிரி 18 :

பின்வரும் அட்டவணையிலிருந்து ஃபூரியர் தொடரின் முதல் மூன்று கெழுக்களைக் காண்க. அதாவது a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 என்ற ஃபூரியர் கெழுக்களைக் காண்க.

$x°$	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
$f(x)$	10·5	20·2	26·4	29·3	27·0	21·5	12·8	1·6	−11·2	−18·0	−15·8	−3·5

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

எனக்கொள்வோம்.

கொசைன் அட்டவணை

$x°$	$f(x)$	$\cos x$	$f(x)\cos x$	$\cos 2x$	$f(x)\cos 2x$	$\cos 3x$	$f(x)\cos 3x$
0	10·5	1	10·5	1	10.5	1	10·5
30	20·2	·866	17·493	·5	10·1	0	0
60	26·4	·5	13·20	−·5	−13·2	−1	−26·4
90	29·3	0	0	−1	−29·3	0	0
120	27·0	−·5	−13·5	−·5	−13·5	1	27 0
150	21·5	−·86	−18·619	·5	10·75	0	0
180	12·8	1	12·8	1	12·8	−1	−12·8

x	$f(x)$	$\cos x$	$f(x)\cos x$	$\cos 2x$	$f(x)\cos 2x$	$\cos 3x$	$f(x)\cos 3x$
210	1·6	−·866	−1·3856	·5	·8	0	0
240	−11·2	−·5	5·6	−·5	5·6	1	−11·2
270	−18·0	0	0	−1	18·0	0	0
300	−15·8	·5	−7·9	−·5	7·9	−1	15·8
330	−3·5	·866	−3·031	·5	−1·75	0	0
	100·8		15·1576		18·70		2·9

$\therefore \quad \dfrac{a_0}{2} = f(x)$-ன் சராசரி மதிப்பு

$$= \frac{\Sigma f(x)}{12} = \frac{100\cdot8}{12} = 8\cdot4.$$

$a_1 = 2 \times f(x) \cos x$-ன் சராசரி மதிப்பு

$$= \frac{2\,\Sigma f(x)\cos x}{12} = \frac{2 \times 15\cdot1576}{12} = 2\cdot5263$$

$a_2 = 2 \times f(x) \cos 2x$-ன் சராசரி மதிப்பு

$$= \frac{2\,\Sigma f(x)\cos 2x}{12} = \frac{2 \times 18\cdot7}{12} = 3\cdot11$$

$a_3 = 2 \times f(x) \cos 3x$-ன் சராசரி மதிப்பு

$$= \frac{2\,\Sigma f(x)\cos 3x}{12} = \frac{2 \times 2\cdot9}{12} = \cdot45$$

$\therefore \quad \dfrac{a_0}{2} = 8\cdot4, \quad a_1 = 2\cdot5263, \quad a_2 = 3\cdot11, \quad a_3 = \cdot45$

சைன் அட்டவணை

x°	$f(x)$	sin x	$f(x)$ sin x	sin $2x$	$f(x)$ sin $2x$	sin $3x$	$f(x)$ × sin $3x$
0	10·5	0	0	0	0	0	0
30	20·2	·5	10·10	·866	17·4932	1	20·2
60	26·4	·866	22·8624	·866	22·8624	0	0
90	29·3	1	29·3	0	0	—1	—29·3
120	27 0	·866	-3·382	—·866	—23·382	0	0
150	21·5	.5	10·75	—·866	—18·6190	1	21·5
180	12·8	0	0	0	0	0	0
210	1·6	—·5	—·8	·866	1·3856	–1	—1·6
240	—11·2	—·866	9·6992	·866	—9·6992	0	0
270	—18·0	—1	18·0	0	0	1	—18·0
300	—15·8	—·866	13·6828	—·866	13·6828	0	0
330	—3·5	—·5	1·75	—·866	3·0310	—1	3·5
	100·8		138·7264		6·7448		–3·7

∴ $b_1 = 2 \times f(x) \sin x$-ன் சராசரி மதிப்பு

$$= \frac{2\Sigma f(x) \sin x}{12} = \frac{2 \times 138.7264}{12} = 23.1211$$

$b_2 = 2 \times f(x) \sin 2x$-ன் சராசரி மதிப்பு

$$= \frac{2 \times \Sigma f(x) \sin 2x}{12} = \frac{2 \times 6.7448}{12} = 1.1241$$

$b_3 = 2 \times f(x) \sin 3x$-ன் சராசரி மதிப்பு

$$= \frac{2 \Sigma f(x) \sin 3x}{12} = \frac{2 \times (-3.7)}{12} = -\cdot 61$$

$$\therefore \quad b_1 = 23.1211, \quad b_2 = 1.241, \quad b_3 = -.61$$

எனவே,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

$$= 8\cdot 4 + 2\cdot 53 \cos x + 3\cdot 11 \cos 2x + \cdot 45 \cos 3x$$
$$+ 23\cdot 12 \sin x + 1\cdot 12 \sin 2x - \cdot 61 \sin 3x.$$

பயிற்சி 12.2

(1) $f(\theta) = m\theta, \quad \left(0 < \theta < \frac{l}{2}\right)$

$m = (l-\theta), \quad \left(\frac{l}{2} < \theta < l\right)$ எனின்,

$$f(\theta) = \frac{ml}{4} - \frac{8ml}{\pi^2}\left[\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{l}\theta + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{l}\theta + \frac{1}{10^2} \cos \frac{10\pi}{l}\theta + \ldots\right]$$

என நிறுவுக.

(2) $f(x) = K, \; (0 < x < a)$

$= 0, \; (a < x < l)$ எனின்,

$$f(x) = \frac{Ka}{l} + \frac{2K}{\pi}\left(\sin \frac{\pi a}{l} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{l}{2} \cos \frac{2\pi}{a}\, l \cos \frac{2x\pi}{l} + \ldots\right)$$ என நிறுவுக.

(3) $f(x) = e^x$, $(-2 < x < 2)$ எனின்,

$$f(x) = \sinh 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{2}{5}\sin \pi x + \frac{3}{10}\sin\frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{5}\cos \pi x - \frac{1}{10}\cos\frac{3\pi x}{2} + \ldots\right]$$ என நிறுவுக.

(4) $f(x) = Kx$, $(0 < x < a)$

$= 0$, $(a < x < 2a)$ எனின்,

$$f(x) = \frac{aK}{4} - \frac{2aK}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{a} + \ldots\right) + \frac{aK}{a}\left(\sin\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots\right)$$ என நிறுவுக.

(5) $f(\theta) = a - \theta$, $(0 < \theta < a)$ எனின், காலவட்டம் $2a$ கொண்ட ஓர் அரைவெளி ஃபூரியர் தொடராக $f(\theta)$ ஐ விரித்தெழுதுக.

(6) $f(y) = \pi y$, $(0 < y < 1)$

$= \pi(2-y)$, $(1 < y < 2)$ எனின்

$(0, 2)$ இடைவெளியில்,

$$f(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi y}{(2n+1)^2}$$

என நிறுவுக.

(7) $f(\theta)$எனும் சார்பை $(0, l)$ இடைவெளியில் சைன் தொடராக எழுதவும்.

(8) காலவட்டம் 4 கொண்ட சைன் கொசைன் தொடராகப் பின் வரும் சார்பை விரித்து எழுதுக.

$$f(t) = 2t, \qquad (0 < t < 1)$$
$$= 2(2 - t), \qquad (1 < t < 2)$$

(9) $f(\theta) = K\theta - \theta^2, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant K$ எனின்,

$f(\theta)$ ஐக் கொசைன் தொடராக விவரி.

(10) $f(x) = \dfrac{m^2}{4} - n^2 \quad , \quad \left(0 < x < \dfrac{m}{2}\right)$

$= 0 \quad , \quad \left(\dfrac{m}{2} < x < m\right)$

எனின், $f(x)$ ஐக் கொசைன் தொடராக விவரிக்கவும்.

(11) பின் வரும் மதிப்புகளுக்கு ஃபூரியர் தொடரின் மூன்று இசைக்கெழுக்கள் (Harmonies) காண்க.

x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
$f(x)$	3·5	7·8	10·5	90	7·5	3	−1·5	−3·5	−4·5	−3·8	−2·3	0·5

(12) x-ன் 12 சம தூர மதிப்புகளுக்கு ஒரு காலவட்டச் சார்பு $f(x)$-ன் மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஃபூரியர் தொடரின் மூன்று இசைக் கெழுக்கள் காண்க.

x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
$f(x)$	−3·0	2·07	5·29	9·75	10·20	4·68	3·0	6·12	6·3	2·25	−3·79	−6·87

விடைகள்

(5) $$f(\theta) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi\theta}{a} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi\theta}{a} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi\theta}{a} + \dots\right]$$

(7) $$f(\theta) = \frac{2l}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$$

(8) (i) $$\sum_{1}^{\infty}\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}t$$

(ii) $$1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2}$$

(9) $$K\theta - \theta^2 = \frac{K^2}{6} - \frac{4K^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi\theta}{K} + \frac{1}{4^2}\cos\frac{4\pi\theta}{K} + \dots\right]$$

(10) $$f(x) = \frac{m^2}{12} + \frac{2m^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{m} - \frac{1}{4^2}\cos\frac{4\pi x}{m} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{m}\dots\right) + \frac{4m^2}{\pi^3}\left(\cos\frac{\pi x}{m} - \frac{1}{3^3}\cos\frac{3\pi x}{m} + \frac{1}{5^3}\cos\frac{5\pi x}{m} - \dots\right)$$

(11) $$f(x) = 2.27 + 2.54\cos\theta - .99\cos 2\theta - .03\cos 3\theta + 7.03\sin\theta + .23\sin 2\theta$$

(12) $$f(x) = 2.96 - 4.5x\cos x - 2.97\cos 2x + 1.5\cos 3x + 3.73\sin x + 2.26\sin 2x + 0.3\sin 3x.$$

IV. புள்ளியியல்

(Statistics)

புள்ளியியல்

(Statistics)

13. அறிமுகம்

13-1. மாந்தரின் அன்றாட வாழ்க்கை முறைக்கும், 'புள்ளிவிவர' முறைகளுக்கும் பல விதங்களில் ஒற்றுமைகள் காணப்படுகின்றன. உலகத்திலுள்ள இலட்சோப இலட்சமான மக்களில் பெரும் பாலோர் 'புள்ளிவிவர' அறிவியலைப் பற்றி இம்மியும் அறியாமல் இருக்கின்றனர். ஆயினும், அவர்கள் தங்களை அறியாமலேயே ஒவ்வொரு நாளும் அவ் வறிவியலைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். அஃதாவது புள்ளிவிவர அறிவியல் அவர்களால் அறியப்படாத நண்பனாக இருந்து அவர்களுக்கு உதவுகிறது.

சந்தைக்குச் சென்ற ஒருவர் தாம் ஒரு பொருளை வாங்க விரும்புகிறார். அந்தப் பொருளின் விலையை அறியப் பல கடைகளிலுமுள்ள விலைப்பட்டியல்களை நோக்கி அறிகிறார். கடைசியில் அவ்விலைப்பட்டியல்களிலிருந்து தமக்கு இலாபகரமானதைத் தேர்ந்தெடுத்து வாங்குகிறார். இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கது அவருக்குப் புள்ளிவிவர அறிவியல்பற்றி ஒன்றுமே தெரியாது என்பதாம். எனினும், அவர் தம்மையறியாமலேயே தாம் வாங்கிய பொருளின் விலையைப் பலதரப்பட்ட பட்டியலை நோக்கித் தமக்குச் சாதகமானதைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டார் என்பதிலிருந்து அவருடைய வாழ்க்கையில் புள்ளி-விவர அறிவியல் எவ்வாறு பின்னிப் பிணைந்துள்ளது என்பதை நாம் அறியலாம். இவ்வாறே மனித வாழ்க்கையின் ஒவ்வொரு துறையிலும், உலகப் பொருள்களிலும் புள்ளியியல் இன்றியமையாததாகக் காணப்படுகிறது.

ஒருவர் ஓர் ஊருக்குச் செல்ல, செல்லுமுன் ஊரின் தூரம், பாதையிலுள்ள வசதிகள், மற்ற சூழ்நிலைகளைத் திட்டவட்டமாகத் தெரிந்துகொண்டு அவ்வூரை அடைவது சாலச்சிறந்ததல்லவா? இவ்வாறே வாழ்க்கையில் திட்டங்களும், புள்ளி விவரங்களும்

இல்லாமல் மேற்கொள்ளப்படுகின்ற பலதரப்பட்ட வினைப்பாடுகளின் முடிவுகள் எதிர்பார்த்தபடி முடிவதில்லை. ஆனால், புள்ளி விவர அறிவியலை நன்கு அறிந்துகொண்டு பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளையும், பண்புகளையும் தெரிந்துகொள்வதால் நாம் மேற்கொள்ளும் செயலிலும் தெளிவு ஏற்படுகின்றது; முடிவும் நாம் எதிர்பார்த்ததுபோலவே முடிகின்றது. எனவே, புள்ளிவிவர அறிவியல் நமக்குப் பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பையும், தன்மையையும் நன்கு உணர்த்துவதோடு நாம் எதிர்பார்க்கும் முடிவையும் நல்கிச் சிறந்த அனுபவத்தையும் பெறச் செய்கிறது.

குறிப்பாகப் பொருளாதாரத்துறையில் பொருள்களை ஒற்றுமை வேற்றுமைப்படுத்தி அறியவும், பொருள்களின் உண்மையான பண்புகளை உணரவும் இவ்வறிவியல் பெரிதும் துணை செய்கிறது. ஒரு தேசத்தின் திட்டத்தை நிர்மாணிப்பதில் புள்ளிவிவர முறைகள் மிகமிகத் தேவைப்படுகின்றன. இவ்வறிவியல் வணிகவியலிலும் அன்றாட வர்த்தகத் துறையிலும் விரிவாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு தொழிலைத் தொடங்க விரும்பும் ஒரு வணிகர் அத்தொழிலைப்பற்றிய திட்டத்தை வகுத்துக்கொண்டு ஒரு பொருளை வாங்கவேண்டிய விலை, விற்கவேண்டிய விலை, தம் உழைப்புக்கும் முதலீட்டிற்கும் தாம் பெறவேண்டிய இலாபம் இன்ன பிறவற்றைக் கணக்கிடுகின்றார். இதற்காகச் சந்தைகளில் கிடைக்கின்ற புள்ளி விவரங்களைச் சேர்க்கின்றார். அப்புள்ளி விவரங்களே இவர் தம் தொழிலைத் தொடங்குதற்குத் துணையாக நிற்கின்றன.

புள்ளி விவர அறிவியல் விற்பனைக் கட்டுப்பாடு, பொருள்களின் தரம், வணிகக் கட்டுப்பாடு முதலியவற்றை நிலை நாட்டவும் பேருதவி புரிகின்றன. இவ்வாறு வணிகத் துறைகளில் மட்டுமில்லாது உலகப் போர் முறைகளிலும் இவ்வறிவியல் இன்றியமையாததாகக் காணப்படுகிறது. ஒரு நாட்டின் படைகளின் எண்ணிக்கை, அவற்றின் தரம், பயிற்சி முறைகள் முதலிய புள்ளி விவரங்களை அறிந்த பின்தான் அது மற்றொரு நாட்டோடு பொருது வெற்றி பெற முடியுமோ என்பதை முடிவு கட்ட முடியும். மிக நவீன போர் முறைகளை மேற்கொள்ளும் அணு ஆயுதங்களைக் கொண்ட நாடுகளுக்கு இப் புள்ளி விவர அறிவியல்தான் உயிர் நாடியாக விளங்குகிறது.

இவ்வாறு புள்ளி விவர அறிவியல் எல்லாத் துறைகளிலும் மிகப் பரந்து பயன்படுவதைக் காண்கிறோம். எனினும், இப் புள்ளி

யியலுக்குச் சில இயற்கைக் குறைபாடுகள் உண்டு. இது எண்ணிக்கைப் போன்றவற்றை அறிய உதவுகின்றதே யொழிய, ஒரு பொருளின் பண்பையும் அதன் தன்மையையும் பிற பொருளின் பண்போடும் தன்மையோடும் துல்லியமாக ஒப்பிட முடிவதில்லை. மேலும், இது தவருகப் பயன்படுத்தப்படவும் கூடும்.

13-2. புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல்

புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல் இருவகைப்படும். (1) மூல விவரங்கள் சேகரித்தல் (Collection of primary data) (2) இரண்டாவது படியான விவரங்கள் சேகரித்தல் (Collection of secondary data). மூல விவரங்கள் எனப்படுவது முதன் முறையாகச் சேகரிக்கப் படும் விவரங்களாகும். இரண்டாவது படியான விவரங்கள் எனப்படுவது ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்டு முழுநிலையிலோ, அம் முழு நிலையின் ஒரு பகுதியாகவோ அமையலாம். பொதுவாக இவையிரண்டுமே கையிலுள்ள நிதி, காலம் ஆகியவற்றைப் பொறுத்துச் சேகரிக்கப்படுபவையாகும்.

13-3. மூல விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறைகள்

மூல விவரங்களைச் சேகரிக்கப் பின்வரும் முறைகள் பொதுவாக மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

(i) நேரடியாகச் சேகரித்தல் :

தானே நேரடியாகச் சென்று தனித்தனியே மக்களைச் சந்தித்து அவர்கள் தரும் புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல். இதற்கு நீண்ட காலமும், அதிகப் பொருளும் செலவாகும். இம் முறையால் நமக்கு உண்மையான, தெளிவான புள்ளி விவரங்கள் கிடைத்தபோதிலும், இதற்குச் செலவிடப்படும் பணமும் நேரமும் அதிகமாகும். மேலும், அவ்வாறு புள்ளி விவரத்தைச் சேகரிக்கச் செல்பவர் எத்தகைய விருப்பு வெறுப்பு மற்றவராக இருக்க வேண்டும். இம்முறை 'நேர்முகப் புள்ளி விவரச் சேகரிப்பு முறை' எனப்படும்.

(ii) மறைமுகச் சேகரிப்பு :

மற்ருெரு முறை 'மறைமுகப் புள்ளி விவரச் சேகரிப்பு முறை' யாகும். இம் முறையில் புள்ளி விவரங்கள் நேரடியாகச் சேகரிக்கப் படாமல் பிறிதொருவர் மூலம் சேகரிக்கப் படுவதாகும். சிலர் தம்மைப் பற்றிய சில புள்ளி விவரங்களைத் தரத் தயங்குவர். இச் சமயங்களில் தேவைப்படும் விவரத்தைப் பற்றிய அறிவு கொண்டவர்களை அணுகி அவ்வகை விவரங்கள் சேகரிக்கப்படும். இவ்

வகை விவரங்களைச் சேகரிக்கும் போது ஒருவருடைய கருத்தை மட்டும் முழுமையாக ஏற்றுக் கொள்ள முடியாது. மெய்யான நிலையை அறிய அவ் விவரங்களின் அறிவு கொண்ட பலரை விசாரித்துத் தெளிவு பெற வேண்டும். மேலும், விவரங்கள் தரு பவரின் குணங்களை மனத்திற் கொண்டு ஆராய்ந்து சேகரித்தல் வேண்டும். அரசால் அமைக்கப்படும் குழுக்கள் யாவும் இம் முறையில்தான் புள்ளிவிவரக் கணக்குகளைச் சேகரிக்கின்றன.

(iii) அட்டவணைகளும் வினாத்தாள்களும் (Schedules and Questionnaires) :

துறை சம்பந்தப்பட்ட அட்டவணைகளையும் வினாத்தாள் களையும் அனுப்பிப் புள்ளி விவரம் சேகரித்தல் பிறிதொரு முறை யாகும். பல தனியாரும், தனியார் நிறுவனங்களும் இம் முறையை மேற்கொள்ளுகின்றன. அச்சிட்ட வினாக்களைச் சம்பந்தப்பட்டவர் களுக்கு அனுப்பி, அவ் வினாக்களுக்கு விடையிறுக்குமாறு படிக் கேட்கப்படும். இம் முறை வெற்றிகரமாகச் செயல்பட வேண்டு மானால், கேட்கப்படும் கேள்விகள் எண்ணிக்கையில் குறை வாகவும், குறிப்பாகவும், தெளிவாகவும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளக் கூடியதாகவும் இருக்க வேண்டும். கேள்விக்குப் பதில் 'ஆம்' அல்லது 'இல்லை' என்றிருக்க வேண்டும். சம்பந்தப்பட்டவர்கள் தெரியப்படுத்த விரும்பாத விவரங்களைக் கேட்கப்படக் கூடாது.

(iv) உள்ளாட்சி நிறுவனங்களின் அறிக்கைகளிலிருந்து சேகரித்தல் :

இம்முறையில் நாம் துல்லியமானதும், உண்மையானதுமான செய்திகளை அறிந்துகொள்ள முடியாது. உள்ளூர் நிறுவனங்கள் தரும் விவரங்கள் அதைத் தயாரிப்பவரின் விருப்பு வெறுப்பு களைப் பிரதிபலிப்பாக அமையுமேயொழிய, உண்மையானவையாக இருக்கும் எனக் கூற முடியாது. ஆனால், இம் முறையில் பொருள் சிலவு அதிகம் கிடையாது.

13-4. இரண்டாம்தர விவரங்கள் சேகரித்தல்

ஏற்கெனவே சேகரித்த புள்ளி விவரங்களை மீண்டும் நமக்கு வேண்டிய முறையில் அன்வயப்படுத்திச் சேகரிப்பது இரண்டாம் தரச் சேகரிப்பாகும். இதில் நமக்கு வேண்டிய துறைக்கு மட்டும் பொருள்களை அன்வயப்படுத்திச் சேகரிப்பதால், முதன் முறை யாகச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் குறிக்கோளுக்கும் இதற்கும் வேறுபாடு காணப்படும். இரண்டாம்தரச் சேகரிப்பு இருவகைப்படும். அவையாவன: (i) வெளியிடப்படாத புள்ளி விவரங்கள் (ii) வெளியிட்ட புள்ளி விவரங்கள்.

(i) வெளியிடப்படாத புள்ளி விவரங்கள்

தனியார் வணிகக் குழுக்கள், ஆராய்ச்சியாளர்கள், தொழிற் கழகங்கள் முதலியவை சேகரித்த விவரங்கள் தனிப்பயன் கருதி சொந்த நலனுக்காகத் தயாரிக்கப்பட்டவையாதலின், அவை வெளியிடப்படாதவை. இவற்றையே நாம் வெளியிடப்படாத விவரங்கள் என்கிருேம்.

(ii) வெளியிடப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள்

சஞ்சிகைகள், புத்தகங்கள், நூல்கள் முதலியவை பல்கலைக் கழகங்களாலும், அறிஞர்களாலும் வெளியிடப்படுகின்றன. அயல் நாட்டுத் தூதரகச் செய்திகள், ஐக்கிய நாடுகள் சபையின் செய்திகள், மத்திய, மாநில அரசுகளின் செய்திகள், வாணிகச் சங்கங்களின் அறிக்கைகள், வைப்பகங்களின் அறிக்கைகள், கூட்டுறவுப் பண்டகசாலையின் அறிக்கைகள் முதலியன ‘வெளி யிடப்பட்ட’ அறிக்கைகளாகும்.

இம் முறையால் நேரமும் பணமும் மிச்சப்படுகிறது. ஆனல், நம்பிக்கைக்கும் துல்லியத்திற்கும் மூலவிவரங்கள் எடுக்கப்பட்ட காலமும் அதை வெளியிடும் நிறுவனமும் முக்கியமானவையாகும்.

13-5. வகைப் படுத்தலும், அட்டவணையில் அமைத்தலும் (Classification and Tabulation)

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் சாதாரணமாக அதிக மாகவும் மிகப் பெரியதாகவும் இருக்கும். அவற்றை மொத்தமாக வைத்துக்கொண்டு அன்வயப்படுத்தவோ, ஆராயவோ முடியாது. எனவே, புள்ளி விவரங்களுக்கு ஒரே சீரான சுருக்கமான வடிவத்தை அவற்றை அட்டவணையிலிடுவதன் மூலம் அளிக்க லாம். பொதுவாகக் காணப்படும் பண்புகளுக்கேற்றவாறு புள்ளி விவரங்களைப் பலவேறு குழுக்களில் அல்லது வகுப்புகளில் வரிசைப் படுத்துதல் ‘வகைப் படுத்தல்’ எனப்படும். வகைப் படுத்தப்பட்ட ஒரு குவியலில் தனிப்பட்ட ஒரு பொருளை எடுத்து அன்வயப் படுத்திக் காணும் பண்புகள் யாவும் அக் குவியலில் அல்லது வகுப்பில் காணப்படும் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் பொதுவாகக் காணப்படுதல் வேண்டும். இவ்வாறு பிரிப்பதனல் எண்ணற்றவை களாகச் சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் தொகை தனித் தனி வகுப்புகளாக மாற்றப்பட்ட பின் மிகக் குறைந்து காணப் படுகிறது. இது நமக்குப் புள்ளி விவரங்களை வைத்து ஆய்ந்து, அன்வயப்படுத்த மேலும் சாதகமாகவும் எளிதாகவும் பயன் படுகிறது. எனவே, வகைப் படுத்துதல் புள்ளி விவரங்களை அட்ட வணைப் படுத்துதலின் முதல் படியாகும்,

தெளிவு, உறுதி, கருத்துக்கிணங்கக் கூடிய தன்மை முதலியவை சிறந்த வகைப் படுத்தலின் பண்புகளாகும். எண்ணிக்கையின் அடிப்படையில் பொருள்களைப் பாகுபடுத்தி ஒன்று சேர்த்தால், அதே முறையில் உள்ளவற்றையெல்லாம் ஒன்று சேர்க்க வேண்டும். இவ்வாறே வேலையற்றோர்களை ஒரு வகுப்பிலும், வருமானத்தின் அடிப்படையில் பலரை பல வகுப்புகளிலும் பகுத்து வரிசைப்படுத்தினோமெனில், நம் ஆராய்ச்சிக்குப் புள்ளியியல் அறிவியல் பெரிதும் பயன்படும். துறைகளைச் சிவில் துறை, படைத் துறை என்றும், பொருள்களை நிறை, எடை, எண்ணிக்கையென்றும், மாந்தர்களைப் படித்தோர், படியாதோர், பணி புரிவோர், பணியற்றோர் என்றும் பிரித்துக் கொள்வோமெனின், அவை செவ்வனே பயன்படும்.

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை மேற்படி அளவைக் கோல்களின் மூலம் நாம் பிரித்தாலும், சிலவற்றைத் துல்லியமாக அறிந்து வகைப்படுத்தமுடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, கல்வி கற்றோர், கல்லாதார் எனப் பிரிக்கலாமேயொழியக் கல்வியறிவை எடைப்போட்டோ, அளந்தோ அறியமுடியாது. மேலும், சில வரையறைகளைக் கொண்டு கற்றோர், கல்லாதவர் எனப் பிரிக்கலாம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பண்புகளை ஆராயும்போது புள்ளி விவரங்கள் பல வகுப்புகளாகப் பிரிக்கப்படும். கற்றோரின் எண்ணிக்கையைப் பாலின வழி ஆராயும்போது, கல்வி அறிவைப்பெற்றவர்களை நான்கு வகுப்புகளாகப்பிரிக்கலாம். அவையாவன; (i) படித்த ஆண்கள் (ii) படிக்காத ஆண்கள் (iii) படித்த பெண்கள் (iv) படிக்காத பெண்கள்.

நேரடி அளவை சாத்தியமாகும்போது புள்ளி விவரங்கள் பிரிவுத் தூரங்க (Class-interval) ளுக்கேற்றவாறு வகைப்படுத்தப்படும். எனவே எடை, உயரம், வருமானம், உற்பத்தி போன்ற புள்ளி விவரங்கள் பிரிவுத் தூரங்களுக்கு ஏற்றவாறு வகைப் படுத்தப்படும். பிரிவுத் தூரங்கள் அமையும் எல்லைகள் பிரிவு எல்லைகள் (Class limits) எனப்படும். பிரிவுத் தூரங்களுக்கேற்ற வாறு வகைப்படுத்தும்போது, பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை, பிரிவெல்லைகளின் தேர்வு, ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள எண்களை எண்ணுதல் முதலியவை முக்கியமாக சமாளிக்கப்படவேண்டியவையாகும்.

சாதாரணமாகப் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 5-க்குக் குறையாமலும் 25-க்கு மேற்படாமலும் இருக்கவேண்டும். பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானிக்கும்போது அது மிகவும் அதிகமான

விவரத்தை மிகத் தெளிவாக அளிக்க வேண்டும் என்பதைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

பிரிவு எல்லைகள் இயலும்போது 5, 10, 100 இவற்றின் மடங்குகளாக இருக்கவேண்டும்.

0 — 10
10 — 20
20 — 30
30 — 40, முதலியன.

இம் முறையில் சில தெளிவற்ற நிலைகள் ஏற்படும். எடுத்துக் காட்டாக 10 மதிப்புடைய பொருளை 0 — 10 பிரிவில் சேர்க்கப் படவேண்டுமா, அல்லது 10 — 20 பிரிவில் சேர்க்கப்பட வேண்டுமா என்ற ஐயப்பாடு எழும். இத்தகைய தெளிவற்ற நிலையைச் சமாளிக்க, பின் வருமாறு வகைப்படுத்தலாம்.

0 — 9	20 — 29
10 — 19	30 — 39

முதலியன.

அல்லது, பின் வருமாறும் வகைப்படுத்தலாம்.

0-ம் 10-க்குக் கீழும்
10-ம் 20-க்குக் கீழும்
20-ம் 30-க்குக் கீழும்
30-ம் 40-க்குக் கீழும் முதலியன.

பிரிவு எல்லைகளை எழுதும் பிறிதொரு முறை 5, 15, 25, 35, ... என்று மைய மதிப்புகளை மட்டும் குறிப்பிடுவதாகும்.

பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையையும், பிரிவு எல்லைகளையும் தீர்மானித்த பிறகு, ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள பொருள்களது எண்ணிக்கையை அறிவது அடுத்து செய்ய வேண்டிய செயலாகும். ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் ஒரு கோடு அப் பொருள் அமையும் பிரிவில் இட வேண்டும். பின் கோடுகளின் எண்ணிக்கை அப் பிரிவிலுள்ள பொருள்களது மொத்த எண் அல்லது அலைவெண் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக என்ற ஐந்து கோடுகள்

பொருள்களின் எண்ணிக்கை அப்பிரிவில் ஐந்து என்பதைக் குறிப்பிடும்.

அட்டவணைப் படுத்துதல்

நிரைகளிலும் நிரல்களிலும் புள்ளி விவரங்களை ஒழுங்காக வரிசைப்படுத்துவது அட்டவணைப் படுத்துதல் எனப்படும். புள்ளி விவரங்களைச் சேகரிப்பதிலும், சீர்படுத்துவதிலும் கடைசிப் படி அட்டவணைப் படுத்துவதாகும். ஒரு பண்பை வெளிப்படுத்த ‘ஒருவழி அட்டவணையும்’ இரு பண்புகளை வெளிப்படுத்த ‘இருவழி அட்டவணைகளும்’ உள்ளன. அட்டவணைப் படுத்தும் போது கீழ்க்காணுபவற்றைக் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

(i) பட்டியலின் தலைப்பு அப்பட்டியல் எதைக் குறிக்கிறது என்பதைத் தெளிவாக உணர்த்த வேண்டும்.

(ii) பட்டியல் தெளிவாகவும், எளிதில் புரிந்துக் கொள்ளக் கூடியதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

(iii) ஒப்பிடவேண்டிய விவரங்கள் அடுத்தடுத்த நிரல்களில் தரப்படவேண்டும்.

(iv) புள்ளி விவரங்கள் அதிகமாக விருப்பின், அவற்றை ஒரே பட்டியலில் அமைக்கக் கூடாது. பண்புகளுக்கேற்றவாறும், நமது தேவைக்கு ஏற்றவாறும் பலவேறு அட்டவணைகளாக பிரிக்கப்படவேண்டும்.

(v) சேர்க்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களில் சில எப்பிரிவிலும் சேர்க்கப்பட முடியாமலிருப்பின், அவற்றைக் குறிக்க அதற்கென்று ஒரு பிரிவு ஏற்படுத்தி, அதில் குறிப்பிட வேண்டும்.

மாதிரி 1 :

ஒரு தேர்வில் 90 மாணவர்கள் அடைந்த மதிப்பெண்கள் ப்பட்டுள்ளன. இவற்றை ஓர் அலைவுப் பரவலில் (Frequency distribution) அமைக்கவும்.

84	40	53	73	37	72	37	45	41	19
91	73	76	36	11	44	74	61	38	22
58	86	94	33	82	19	46	39	27	35
72	77	65	91	40	51	50	78	66	39
44	71	74	53	27	67	18	23	51	80
87	54	50	63	84	58	59	12	29	37
76	46	65	69	53	76	27	71	63	67
43	55	80	47	19	38	92	62	47	75
83	43	57	29	35	16	13	22	39	73

இந்த எண் கூட்டத்தில் மிகச் சிறிய எண் 11; மிகப் பெரிய எண் 94 ஆகும். எனவே, பிரிவுத் தூரம் 10 கொண்ட 9 பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

பிரிவுகள்	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
10-19	卌 |||	8
20-29	卌 |||	8
30-39	卌 卌 ||	12
40-49	卌 卌 ||	12
50-59	卌 卌 |||	13
60-69	卌 卌	10
70-79	卌 卌 卌	15
80-89	卌 |||	8
90-99	||||	4
	மொத்தம்	90

படம் 33.

மாதிரி 2 :

ஓரிடத்தில் 40 ஆண்டுகளாகப் பெய்த மழை விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இதற்குப் பிரிவுத் தூரம் 5 கொண்ட அலைவெண் பரவல் அமைக்கவும்.

47·9	43·4	51·5	44·4	53·2
36·9	38·2	58·6	38·7	62·8
53.0	46·2	44·1	44·2	50·5
46·5	51·5	49·7	50·4	47·9
56·7	41·2	37·5	45·4	74·3
49·3	72·9	44·3	38·3	46·8
54·5	53·1	52·5	38·4	61·2
48·9	60·8	46·2	60·7	67·5

மேற்கண்ட எண் கூட்டத்தில் மிகச் சிறிய எண் 3·69; மிகப் பெரிய எண் 74·3. இவற்றை 5 பிரிவுத் தூரம் கொண்ட 8 பிரிவுகளாகக் கொள்ளலாம்.

பிரிவுகள்	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
36 - 41	𝍸 |	6
41 - 46	𝍸 |||	8
46 - 51	𝍸 𝍸	10
51 - 56	𝍸 ||	7
56 - 61	||||	4
61 - 66	||	2
66 - 71	|	1
71 - 76	||	2
	மொத்தம்	40

படம் 34.

மாதிரி 3:

ஒரு நகரில் உள்ள 1,00,000 பேர்களில் $\frac{1}{5}$ பேர் காச நோயால் அவதிப்படுகின்றனர். இவர்களில் 5000 பேர் இன்ஃப்புளயன்ஸா நோயாலும் பீடிக்கப்பட்டிருந்தனர். இவர்களுள் 1000 பேர் சுகாதாரமான வீடுகளில் குடியிருந்தனர். காச நோயால் வருந்தும் இன்ஃப்புளயன்ஸா நோய்க்குத் தப்பியவர்களில் $\frac{1}{15}$ பேர்கள் சுகாதார மற்ற வீடுகளில் இருந்தவர்கள். மொத்தத்தில் 21,000 பேர்கள் இன்ஃப்புளயன்ஸா நோயால் பீடிக்கப்பட்டிருந்தனர். சுகாதாரமான வீடுகளில் இருந்தவர்கள் மொத்தம் 41,000. ஃபுளுவால் மட்டும் பாதிக்கப்பட்டுச் சுகாதாரமற்ற வீடுகளில் குடியிருந்தவர்கள் 2000 பேர்.

மேற்கண்ட செய்தியினை ஒரு பட்டியல் வடிவத்தில் தருக.

		காச நோய்				மொத்தம்
		பாதிக்கப்பட்டவர்		பாதிக்கப்படாதவர்		
		சுகாதார மற்ற வீடுகள்	சுகாதார மான வீடுகள்	சுகாதார மற்ற வீடுகள்	சுகாதார மான வீடுகள்	
இன்ஃபுளயன்ஸா	பாதிக்கப் படாதவர்	4,000	1,000	2,000	14,000	21,000
	பாதிக்கப் பட்டவர்	1,000	14,000	34,000	30,000	79,000
மொத்தம்		5,000	15,000	36,000	44,000	1,00,000

மாதிரி 4 :

பின் வருவன 50 மில் தொழிலாளர்களது வயதும் மாத ஊதியமுமாகும். இவற்றை ஏற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துத் தருக.

வயது	மாத ஊதியம்	வயது	மாத ஊதியம்
37	81	31	110
38	99	43	109
49	101	46	110
37	102	37	140
23	81	38	90
31	100	21	80
45	135	30	139

வயது	மாத ஊதியம்	வயது	மாத ஊதியம்
31	100	30	100
35	130	41	115
29	90	35	101
41	89	41	89
41	81	48	100
45	94	34	105
28	99	36	109
41	92	21	98
35	120	31	125
40	119	48	171
49	76	49	170
21	76	37	103
21	94	46	160
38	89	21	76
22	76	49	170
24	158	42	125
45	90	39	144
42	113	49	174

முதலில் வயது பிரிவின் அலைவெண் பரவலை அமைப்போம்.

வயது பிரிவுகள்	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
20 - 29	卌 卌	10
30 - 39	卌 卌 卌 IIII	19
40 - 49	卌 卌 卌 卌 I	21
	மொத்தம்	50

படம் 35.

அடுத்து ஊதியப் பிரிவு அலைவெண் அமைப்போம்.

ஊதியப் பிரிவு	அலைவெண் குறிகள்	அலைவெண்
75 - 99	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
100-124	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
125 149	𝍸 ||	7
150 174	𝍸 |	6
	மொத்தம்	50

படம் 36.

எனவே, தேவையான பட்டியல்:

மாத ஊதியம்	மில் தொழிலாளர்கள்			மொத்தம்
	20—29	30—39	40—49	
75— 99	9	4	7	20
100—124	—	10	7	17
125—149	—	5	2	7
150—174	1	—	5	6
மொத்தம்	10	19	21	50

பயிற்சி 13

1. ஒரு தேர்வில் 90 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றிற்கு ஓர் அலைவெண் பட்டியல் தயாரிக்கவும்.

84	75	73	36	82	40
91	86	76	33	51	67
58	77	94	91	27	58
72	75	65	53	84	76
44	73	74	63	53	38
87	71	50	69	19	16
76	54	65	47	35	37
43	46	80	29	72	74
83	55	57	37	44	46
40	41	73	11	19	50
18	61	62	51	22	
59	39	22	29	35	
27	78	41	63	39	
92	23	38	47	80	
13	12	27	39	57	
45	71	66	19	65	

2. பின்வரும் மதிப்பெண்களை மிகச் சிறிய பிரிவு 10-20 ஆகக்கொண்டு அலைவெண் பரவல் அமைக்கவும்.

13	62	86	75	73	91
81	61	73	85	73	33
58	59	43	62	96	69
81	58	33	57	69	30
85	57	76	64	57	64
75	75	95	70	22	
61	72	73	95	78	
70	84	65	57	80	
84	91	77	74	36	
84	87	72	50	70	
85	76	29	78	85	
87	43	43	49	47	
67	83	85	55	69	
65	40	42	64	63	
62	73	80	92	53	

3. பின்வரும் விவரங்களை பிரிவுத் தூரம் 10 ஆகக்கொண்டு அலைவெண் பரவல் அமைக்கவும்.

50	95	65	60	80	45
45	67	75	85	60	40
55	75	85	105	65	85
65	85	125	125	85	135
60	125	110	95	55	140
90	110	87	130	75	95
115	87	63	120	95	65
85	63	100	65	55	45
95	100	115	70	45	35
100	95	65	95	35	125
95	120	40	125	105	45
85	115	35	35	75	45

4. கீழ்க்கண்டவை ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் கணிதத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்களாகும். இவற்றை உற்றதோர் அலைவுப் பரவலில் அமைத்துத் தருக.

45	47	38	65	51
54	54	95	95	33
38	28	17	34	28
72	17	28	23	46
19	84	83	9	66
28	93	53	45	15
34	74	28	0	57
45	99	46	24	36
63	15	66	8	48
45	24	59	98	82

5. 1951 ஆம் ஆண்டு இந்தியாவின் மக்கள் தொகை 35 கோடி 70 இலட்சம். இவர்களில் 24 கோடி பேர் கிராமங்களிலும், மற்றவர்கள் நகரிலும் வசிக்கிறார்கள். உழவரல்லாதவர்களில் 5 கோடி 50 இலட்சம் பேர் கிராமங்களில் இருந்தனர். தங்களைத் தாங்களே போற்றிக்கொள்ளும் 10 கோடி 50 இலட்சம் பேர்களில் 7 கோடி 1 இலட்சம் பேர் உழவுத் தொழிலிலிருந்தனர். பிறரைச் சார்ந்து வாழ்பவர்களில் 14 கோடி 7 இலட்சம் பேர் உழவர்களைச் சார்ந்தும், 6 கோடி 7 இலட்சம் பேர் மற்றவர்களைச் சார்ந்தும் இருந்தார்கள். இதனை உற்றதொரு பட்டியலில் அமைத்துக் காட்டுக.

14. விளக்கப் படங்கள்

14-1. ஒரே எண் குவியலாகத் தோன்றும் புள்ளி விவரங்களைப் பாகுபடுத்தி விளக்கப் படங்களில் அமைத்துக் காட்டுவது புள்ளியியல் மரபாகும். இவ் விளக்கப்படங்கள் சராசரி அறிவுடைய சாதாரண மக்களும் புள்ளி விவரங்களைத் தெளிவாகத் தெரிந்து கொள்ளப் பெரிதும் உதவுகிறது. மேலும் புள்ளி விவரங்களை ஒப்பிட்டு நோக்கவும் இப் படங்கள் உதவுகின்றன.

விளக்கப் படங்களில் முக்கியமானவை :

(1) பட்டை விளக்கப்படங்கள் (Bar diagrams)

(2) வட்ட விளக்கப்படங்கள் (Pie diagrams)

(3) உருவக விளக்கப்படங்கள் (Pictograms)

(4) நேர் கோட்டுப் படங்கள் (Line diagrams)

(5) பரவல் செவ்வகங்கள் (Histograms)

(6) அலை வெண் பல கோணங்கள் (Frequency Polygons)

(7) அலைவெண் வரைகள் (Frequency Curves)

(8) குவி அலைவெண் வரைகள் அல்லது ஓகைவ் வரைகள் (Cumulative frequency curves or Ogives)

(9) லாரன்ஸ் வரைகள் (Lorenz Curves)

14-2. பட்டை விளக்கப் படங்கள்

ஒரு நேர் கோட்டின் மீது பல பட்டைச் செவ்வகங்கள் வரைதல் பட்டை விளக்கப்படங்களாகும். இத் தகைய படங்களில் பட்டைகளுக்கிடையேயுள்ள இடை வெளி ஒரே அளவில் இருக்க வேண்டும். பட்டைகள் ஒரே வண்ணத்தில் இருக்கும். மேலும் பட்டையின் அகலங்கள் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். பட்டைகளது உயரம் அலைவு எண்களுக்கு ஏற்றவாறு இருக்கும்.

மீண்டும், ஒவ்வொரு பட்டையையும் பலவாறு பிரித்துக் காட்டப்படும் வேறு வகைப்பட்ட விளக்கப் படங்களும் உண்டு. அவை பல அங்க பட்டை விளக்கப் படங்கள் (Component Bar diagrams) எனப்படும்.

பட்டை விளக்கப் படங்களில் 'சதவீதப் பல் அங்க பட்டை விளக்கப் படங்கள்', 'இணைப் பட்டை விளக்கப் படங்கள்' என்ற வகைகளும் உண்டு. கொடுத்துள்ள புள்ளி விவரத்தினில் ஒவ்வொரு மொத்தத்தையும் நூறாகக் கொண்டு, ஒவ்வொரு இணைப் பிரிவினையும் ஏற்ற சதவீத எண்ணில் அமைத்து வரையும் பட்டை விளக்கப் படங்கள் 'சதவீதப் பல் அங்க பட்டை விளக்கப்படங்கள்' எனவும், இரு விவரங்களை ஒப்பிட ஏதுவாகின்ற படங்கள் 'இணைப் பட்டை விளக்கப் படங்கள்' எனவும் கூறப்படும்.

14-3. வட்ட விளக்கப் படங்கள்

சில புள்ளி விவரங்களை ஒரு வட்டத்தின் பல அங்கங்களாகக் காட்டி விளக்கலாம். மொத்தத்தை 360° எனக் கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் ஏற்ற கோணத்தில் வட்ட வில்களைப் பிரித்துக் காட்டல் 'வட்ட விளக்கப் படங்கள்' எனப்படும். ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒவ்வொரு வழியில் வேறுபடுத்தப்பட வேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக, பல்வேறு பிரிவுகளையும் பல் வேறு வண்ணத்தில் காட்டலாம்.

14-4. உருவக விளக்கப் படங்கள்

புள்ளி விவரங்களின் வெவ்வேறு இனங்களை அவற்றின் மதிப்புகளுக்கேற்ற விகிதத்தில் உருவகப் படங்கள் வரைந்து காட்டுவது உருவக விளக்கப் படங்களாகும். எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு கிராமத்திலுள்ள ஆடு மாடுகளின் எண்ணிக்கை 302, 197 எனின், இவற்றை 3 ஆடுகள், 2 மாடுகள் வரைந்து காட்டி உணர்த்தலாம்.

14-5. நேர்கோட்டு விளக்கப் படங்கள்

அலைவெண் பரவலில் தரப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களை விளக்கும் முறைகளில் நேர்கோட்டுப் படங்கள் வரைந்து காட்டுவது ஒன்றாகும். இம் முறையில் x, y அச்சுகள் வரைந்து, x அச்சின் வழி பிரிவுத் தூரங்களையும் (Class intervals), y அச்சின் வழி அலைவெண்களையும் குறிக்க வேண்டும். பின் பிரிவுத் தூரங்களின் மையப் புள்ளிகளில் அலைவெண் மதிப்புக் கேற்றவாறு y ஆயத்திற்கு இணையாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால், கிடைக்கப்பெறுவது நேர்கோட்டுப் படங்களாகும்.

14-6. பரவல் செவ்வகங்கள்

x அச்சின் வழி பிரிவுத் தூரங்களை ஏற்றதோர் அளவில் குறித்துப் பின் பிரிவுத் தூரங்களை அடியாகக் கொண்டு அலை வெண்களுக்கேற்ற பரப்பு கொண்ட செவ்வகங்கள் அமைப்பது 'பரவல் செவ்வகங்கள்' எனப்படும். சம பிரிவுத் தூரங்களுக்குச் செவ்வகங்களின் உயரம் அலைவெண்களுடன் வீத அளவாக இருக்கும்.

14-7. அலைவெண் பல்கோணம், அலைவெண் வளைவு

தொகுக்கப்படாத அலைவெண் பரவலுக்கு (Ungrouped frequency distribution) பின் வருமாறு அலைவெண் பல்கோணம் வரையலாம்.

x அச்சின் வழி மதிப்புகளைக் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். பின் y அச்சின் வழி அலைவெண்களைக் குறிக்கவேண்டும். மதிப்புகள் x_1, x_2, x_3, எனவும், ஒத்த அலைவெண்கள் y_1, y_2, y_3, ... எனவும் கொண்டு $(x_1\ y_1)$ $(x_3\ y_3)$ $(x_3\ y_3)$ ... புள்ளிகளைக் குறித்துப் பின் இப் புள்ளிகளை நேர்கோடுகளால் இணைத்துக் கிடைக்கப் பெறும் படம் அலைவெண் பல்கோணமாகும்.

தொகுக்கப்பட்ட (grouped) அலைவெண் பரவலுக்கு அலை வெண் பல்கோணம் வரைய முதலில் x அச்சின் வழி பிரிவுத் தூரங்களைக் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். அடுத்துப் பரவல் செவ்வகங்கள் வரைந்து, செவ்வகங்களின் மேல் பக்க நடுப் புள்ளிகளை நேர் கோடுகளால் இணைத்துப் பெறுவது அலைவெண் பல்கோணமாகும்.

பிரிவுத் தூரங்கள் சிறியதாக இருக்கும்போது, பரவல் செவ்வகங்களது மேல் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை வளைவுக்கோட்டினால் இணைத்துப் பெறப்படுவது 'அலைவெண்' எனப்படும்.

14.8 'ஓகைவ்' வரைகள் :

'ஓகைவ்' வரைய முதலில் குவிவு அலைவெண் பட்டியல் தயாரிக்கப்படவேண்டும். அடுத்து மெய்ப்பிரிவுகளின் மேலெல்லைகளை x ஆயத் தொலைகளாகவும், ஒத்த குவிவு அலைவெண்களை y ஆயத் தொலைகளாகவும் கொண்ட புள்ளிகள் குறிக்கப்பட வேண்டும். வரைத்தாளில் குறித்த இப் புள்ளிகளை வளைவுக் கோட்டால் இணைத்துப் பெறப்படுவது 'ஓகைவ்' (Ogive) வரை எனப்படும் இது கீழின 'ஓகைவ்' (Less than Ogive) எனப்படும்.

மெய்ப்பிரிவுகளின் மேலெல்லைகளுக்குப் பதில் கீழ் எல்லைகளை x ஆயத் தொலைகளாகக் கொண்டு வரையப்படும் 'ஓகைவ்' 'மேலின ஓகைவ்' எனப்படும்.

14.9 லாரன்ஸ் வரை :

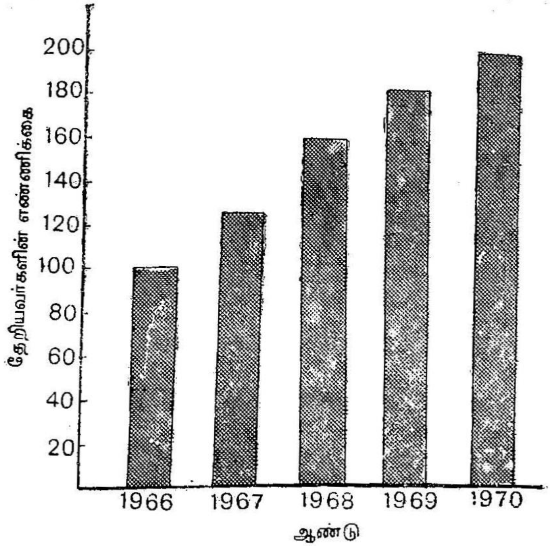
சாதாரண குவிவு அலைவெண்களுக்குப் பதில் சதவீத குவிவு அலைவெண்களை y ஆயத் தொலைகளாகக் கொண்டு வரையப்படும் வளைவு 'லாரன்ஸ் வரை' எனப்படும் இது 'சதவீதக் குவிவு அலைவெண் வரை' எனவும் கூறப்படும்.

மாதிரி 1 :

ஒரு கல்லூரியில் பட்ட வகுப்பில் தேறியவர்கள் எண்ணிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. பட்டை விளக்கப்படம் வரையவும்.

ஆண்டு	தேறியவர்கள் எண்ணிக்கை
1966	100
1967	125
1968	160
1969	180
1970	200

முதலில் x ஆயத்தின் வழி ஆண்டுகளைக் குறித்துக் கொள்வோம். பின் y ஆயத்தின் வழி அலைவெண்களைக் குறிப்போம்.



படம் 37.

மாதிரி 2 :

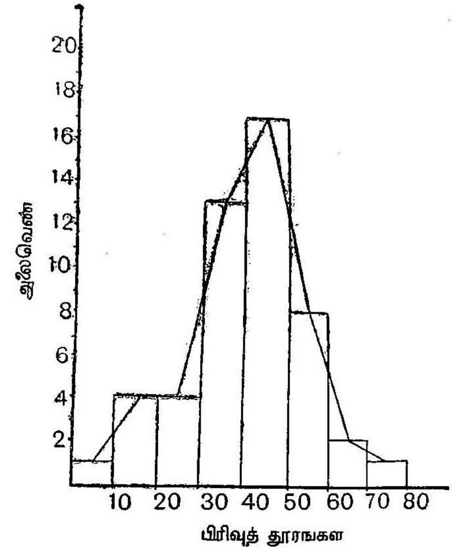
ஒரு தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இதற்கான அலைவெண் பரவலைத் தயாரித்துப் பரவல் செவ்வகங்கள், அலைவெண் பல் கோணம், ஓகைவ் வரைகள் முதலியவை வரைக.

43	30	50	51	31
40	58	39	42	23
43	28	55	45	62
38	20	54	42	18
58	41	26	47	46
48	67	70	8	14
44	18	55	36	39
46	33	13	46	32
44	33	30	53	40
59	38	43	39	37

முதலில் அலைவெண் பரவல் அட்டவணை தயாரிப்போம்.

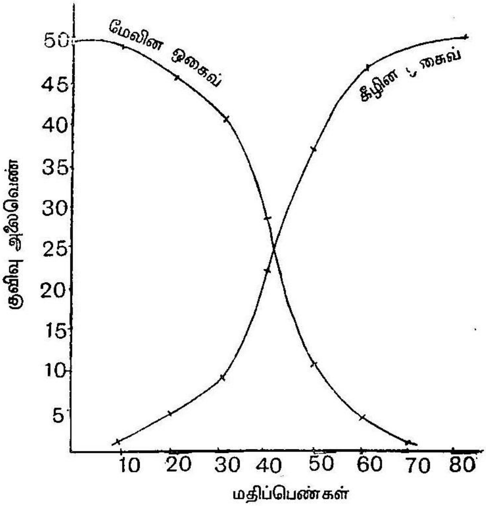
பிரிவுகள்	அலைவெண் குறிகள்	அலை வெண்கள்
0 - 10	|	1
10 - 20	||||	4
20 - 30	||||	4
30 - 40	卌 卌 |||	13
40 - 50	卌 卌 卌 ||	17
50 - 60	卌 |||	8
60 - 70	||	2
70 - 80	|	1
மொத்தம்		50

படம் 38.



படம் 39.

அலைவெண் பரவல் செவ்வகம். அலைவெண் பல் கோணம்.



ஒகைவ் வரைகள்

படம் 40.

குவிவு அலைவெண் அட்டவணை

மெய்ப் பிரிவின் மேல் எல்லை	குவிவு அலைவெண்	மெய்ப் பிரிவின் கீழ் எல்லை	குவிவு அலைவெண்
10	1	0	50
20	5	10	49
30	9	20	45
40	22	30	41
50	39	40	28
60	47	50	11
70	49	60	3
80	50	70	1

பயிற்சி 14.

1. பின் வரும் விவரங்களுக்குப் பரவல் செவ்வகங்கள் வரைக.

பிரிவுகள்	அலைவெண்கள்	பிரிவுகள்	அலைவெண்கள்
0 — 2	5	15 — 17	90
3 — 5	45	18 — 20	28
6 — 8	155	21 — 23	22
9 — 11	190	24 — 26	12
12 — 14	185	27 — 29	8
			750

2. பின் வரும் அட்டவணையிலுள்ள விவரங்களுக்குப் பரவல் செவ்வகம், அலைவெண் பல்கோணம் வரைக.

பிரிவுகள்	அலைவெண்கள்	பிரிவுகள்	அலைவெண்கள்
12.5 — 17.5	30	32.5 — 37.5	85
17.5 — 22.5	195	37.5 — 42.5	50
22.5 — 27.5	255	42.5 — 47.5	15
27.5 — 32.5	170		
			800

3. கீழே காணும் அலைவெண் பரவலுக்கு 'ஓகைவ் வரைகள்' வரையவும்.

ஊதியம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்கள்	ஊதியம் (ரூபாயில்)	தொழிலாளர்கள்
20 —	8	25 —	25
21 —	10	26 —	15
22 —	11	27 —	9
23 —	16	28 —	6
24 —	25		

4. இரண்டாவது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தில் பல்வேறு துறைகளுக்கு ஒதுக்கப்பட்ட நிதி நிலையினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் விளக்குகிறது.

இதனை ஒரு வட்ட விளக்கப் பட்டத்தினில் அமைத்துக் காட்டுக.

	ரூபாய் (கோடியில்)
உழவு, சமுதாய வளர்ச்சி	565
மின் சக்தி	440
போக்குவரத்து, செய்தித்துறை	1384
பாசன வசதி, வெள்ளக் கட்டுப்பாடு	458
தொழிற்சாலை, சுரங்கம்	891
சமூகச் சேவை	946
பிற இனங்கள்	116
மொத்தம்	4800

5. இரு வகுப்பு மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இதனை 'லாரன்ஸ் வரைகளில்' அமைத்துக் காட்டுக.

மதிப்பெண்கள்	வகுப்பு *A*	வகுப்பு *B*
40	16	31
50	18	27
60	20	15
70	12	10
80	10	4
90	9	2
100	5	1

6. கீழ்க் காணும் குவிவு அலைவெண் பரவலை அலைவெண் பரவலாக மாற்றி எழுதுக.

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
10-க்குக்கீழ்	5
20-க்குக்கீழ்	21
30-க்குக்கீழ்	35
40-க்குக்கீழ்	55
50-க்குக்கீழ்	70
60-க்குக்கீழ்	77
80-க்குக்கீழ்	80

7. கீழ்க் காணும் விவரங்களுக்கு 'ஓகைவ் வரைகள்' (Ogives) வரைக.

x	f	x	f
604	3	610	33
606	16	612	11
608	35	614	2

15. மையப் போக்கின் அளவைகள்

(Measures of Central tendency)

15-1. சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் எளிதில் அறிவுக்குப் புலப்படாத எண் குவியல்களாக இருக்கும். மனித மனம் அதிக அளவில் உள்ள விவரங்களையும், அவற்றிற்குள்ள தொடர்புகளையும் கிரகிக்கும் சக்தியற்றது. எடுத்துக்காட்டாக, 100 மாணவர்களது எடை, உயரம், வருமானம், செலவு ஆகியவற்றை நினைவில் வைத்துக் கொள்ள முடியாது. மேலும் ஒரு வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்களது மதிப்பெண்களுடன் மற்றொரு வகுப்பிலுள்ள 100 மாணவர்களது மதிப்பெண்களை ஒப்பிட நமக்கு ஓர் அளவு தேவைப்படுகிறது. எனவே, இரு குழுக்களது திறனை மதிப்பிடச் சராசரி மிகவும் உதவியாக இருக்கிறது.

மையப் போக்கின் பல்வேறு அளவைகள் :

(1) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic mean or mean)

(2) பெருக்குச் சராசரி (Geometric mean)

(3) இசைச் சராசரி (Harmonic mean)

(4) இடை நிலை (Median)

(5) முகடு (Mode)

15-2 கூட்டுச் சராசரி

$x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ என்ற n மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n}{n} \text{ ஆகும்.}$$

இது $\bar{x}$ எனக் குறியிடப்படும்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

எடுத்துக்காட்டாக, 5, 8, 12, 17, 20, 23, 13 என்ற ஏழு எண்களது கூட்டுச் சராசரி,

$$\bar{x} = \frac{5 + 8 + 12 + 17 + 20 + 23 + 13}{7}$$

$$= \frac{98}{7} = 14.$$

ஓர் அலைவுப் பரவலில் $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்பன n மையமதிப்புகளெனவும், அம் மதிப்புகளின் ஒத்த அலைவெண்கள் $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ எனவும் கொண்டால், அதன் கூட்டுச் சராசரி,

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

மாதிரி 1 :

பின்வரும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

மாத ஊதியம்	தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை
12·5 — 17·5	3
17·5 — 22·5	25
22·5 — 27·5	20
27·5 — 32·5	15
32·5 — 37·5	5
37·5 — 42·5	3
42·5 — 47·5	5
47·5 — 52·5	2
52·5 — 57·5	2
	80

மைய மதிப்பு x_i	அலைவெண் f_i	$f_i x_i$
15	3	45
20	25	500
25	20	500
30	15	450
35	5	175
40	3	120
45	5	225
50	2	100
55	2	110
	80	2225

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{2225}{80} = 27{\cdot}8$$

15-3. கூட்டுச் சராசரி காண தேவையான சூத்திரம்

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்பன n எண்களது மைய மதிப்புகள், $f_1, f_2\ f_3, \ldots f_n$ என்பன முறையே அம் மதிப்புகளது அலைவெண்கள் எனக் கொள்வோம்.

A என்பது எடுத்துக் கொண்ட மதிப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்று எனவும், $d_1, d_2, d_3, \ldots d_n$ என்பவை $x_1, x_2, x_3,\ \ x_n$ மதிப்புகளுக்கு A -லிருந்து உள்ள வேறுபாடுகள் எனவும் கொள்வோம்.

அதாவது $d_i = x_i - A$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i (d_i + A)}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} + \frac{A \Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

$$= A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N}, \quad N = \Sigma f_i$$

குறிப்பு 1 :

$d_1, d_2, \ldots, d_n$ வேறுபாடுகளை வகுப்புப் பிரிவின் இடைவெளி C-ன் மடங்குகளாகக் கொள்வோமெனின்,

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} \times C$$

2. மிக உயர்ந்த அலைவெண்ணுக்குரிய மைய மதிப்பை A ஆகக் கொள்வது சிறந்தது.

மாதிரி 2 :

பின்வரும் விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

பிரிவுகள்	மாணவர்கள்
60—62	5
63—65	20
66—68	40
69—71	25
72—74	10

மைய மதிப்பு x_i	அலைவெண் f_i	$d_i = \frac{x_i - 67}{3}$	$f_i d_i$
61	5	−2	−10
64	20	−1	−20
67	40	0	0
70	25	1	25
73	10	2	20
	100		+15

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} \times C$$

$$= 67 + \frac{15}{100} \times 3$$

$$= 67 + \cdot 45$$
$$= 67 \cdot 45$$

எனவே, கூட்டுச் சராசரி $= 67 \cdot 45$

15-4. கூட்டுச் சராசரியின் பண்புகள்

1. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம்.

நிரூபணம் :

(i) $$\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma_i x_i$$

அதாவது,

$$n\bar{x} = \Sigma_i x_i$$

விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$\Sigma_i d_i = \Sigma_i (x_i - \bar{x})$$
$$= \Sigma_i x_i - \bar{x} \Sigma_i$$
$$= n\bar{x} - n\bar{x}$$
$$= 0.$$

(ii) $$\bar{x} = \frac{\Sigma_i f_i x_i}{\Sigma_i f_i}$$
$$= \frac{1}{N} \Sigma_i f_i x_i, \quad N = \Sigma_i f_i x_i$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்களின் கூடுதல்

$$\Sigma_i f_i d_i = \Sigma_i f_i (x_i - \bar{x})$$
$$= \Sigma_i f_i x_i - \bar{x} \Sigma_i f_i$$
$$= N\bar{x} - N\bar{x}$$
$$= 0$$

2. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கியங்களது கூட்டுத் தொகை மிகச் சிறியதாகும்.

நிரூபணம் :

$f(x)$ என்பது x எனும் எண்ணிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad f(x) = \Sigma (x - x_i)^2$$
$$= \Sigma (x^2 - 2x x_i + x_i^2)$$
$$= \Sigma x^2 - 2x \Sigma x_i + \Sigma x_i^2$$
$$= nx^2 - 2x \Sigma x_i + \Sigma x_i^2$$

$$\therefore \quad \frac{df}{dx} = 2nx - 2 \Sigma x_i$$

$f(x)$ மீச்சிறியதெனின், $\dfrac{df}{dx} = 0$

$$\therefore \quad 2nx - 2 \Sigma x_i = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{\Sigma x_i}{n} = \bar{x}.$$

அதாவது $x = \bar{x}$ எனின் $f(x)$ மீச்சிறியதாகும்.

3. n_1 எண்களது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$, n_2 எண்களது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$ எனின், $(n_1 + n_2)$ எண்களது கூட்டுச் சராசரி $\dfrac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$.

n_1 எண்களது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$

$\therefore$ n_1 எண்களது மொத்த மதிப்பு $n_1 \bar{x}_1$

n_2 எண்களது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$

$\therefore$ n_2 எண்களது மொத்த மதிப்பு $n_2 \bar{x}_2$.

$(n_1 + n_2)$ எண்களது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ எனின்,

$(n_1 + n_2)$ எண்களது மொத்த மதிப்பு $(n_1 + n_2)\bar{x}$.

ஆனால், $(n_1 + n_2)$ எண்களது மொத்த மதிப்பு

$n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2$

$$\therefore \quad (n_1 + n_2)\bar{x} = n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}.$$

15-5. கூட்டுச் சராசரியின் தகுதிகள், குறைபாடுகள்

தகுதிகள் :

1. கூட்டுச் சராசரி நன்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள மையப் போக்கு அளவாகும்.

2. கூட்டுச் சராசரி கொடுத்துள்ள அனைத்து விவரங்களின் அடிப்படையில் அமைந்தது.

3. கூட்டுச் சராசரி கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு உட்படும் தன்மை வாய்ந்தது.

4. கூட்டுச் சராசரி எளிதில் புரிந்துக்கொள்ளக் கூடியது, நிலையானது.

குறைபாடுகள் :

1. மிக உயர்ந்த, தாழ்ந்த தனி அம்சங்கள் கூட்டுச் சராசரியை மிகவும் பாதிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நிறுவனத்தில் வேலைபார்க்கும் 5 பேர்களின் மாத ஊதியம் முறையே 750, 48. 50, 75, 73 எனின், கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{750 + 48 + 50 + 75 + 73}{5} = 200 \text{ ரூபாய்.}$$

இது சரியான அளவை ஆகாது.

2. யாதேனும் ஓர் அம்சம் கிடைக்கப்பெறவில்லை எனினும், கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிட முடியாது.

3. கூட்டுச் சராசரி கொடுக்கப்பட்டுள்ள அம்சங்களில் யாதேனும் ஒன்றாக இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

4. இரு குழுக்களை ஒப்பிடும்போது, சிலசமயம் தவறான முடிவுகளுக்கு வரக்கூடும்.

எடுத்துக்காட்டாக, குழு A-லுள்ளவர்களது சராசரி மாத ஊதியம் $\frac{2000 + 210 + 110 + 80}{4} = 600$ எனவும், குழு B-லுள்ளவர்களது சராசரி மாத ஊதியம் $\frac{620 + 610 = 590 + 580}{4}$ $= 600$ எனவும் கொள்வோம். இவ்விரு குழுக்களது கூட்டுச் சராசரிகளும் சமமாதலினால், இவை இரண்டும் ஒரே மாதிரியான குழுக்கள் என முடிவு செய்வது தவறாகும்.

15-6. பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற n அம்சங்களது பெருக்குச் சராசரி

$$g = (x_1\, x_2 \ldots x_n)^{1/n}$$ ஆகும்.

அலைவுப் பரவலில் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற n மதிப்புகளின் அலை வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots f_n$ எனின், பெருக்குச் சராசரி

$$g = \left(x_1^{f_1}\ x_2^{f_2} \ldots x_n^{f_n}\right)^{1/N}, \quad N = \Sigma f_i$$

மாதிரி 3 :

கீழ்க்காணும் 10 எண்களது பெருக்குச் சராசரி காண்க.

2, 5, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 19, 20.

$$g = (2 \times 5 \times 7 \times 9 \times 10 \times 12 \times 15 \times 18 \times 19 \times 20)^{1/10}$$

$$\log g = \frac{1}{10} [\log 2 + \log 5 + \log 7 + \log 9 + \log 10 + \log 12 + \log 15 + \log 18 + \log 19 + \log 20]$$

$$= \frac{1}{10} [0 \cdot 3010 + 0 \cdot 6990 + 0 \cdot 8451 + 0 \cdot 9542 + 1 \cdot 000 + 1 \cdot 0792 + 1 \cdot 1761 + 1 \cdot 2553 + 1 \cdot 2788 + 1 \cdot 3010]$$

$$= \frac{1}{10} [9 \cdot 8897] = \cdot 98897$$

$$\therefore \quad g = \text{Anti log } 0 \cdot 9890$$

$$= 9 \cdot 750$$

எனவே பெருக்குச் சராசரி $= 9 \cdot 750$

15-7. பெருக்குச் சராசரி தகுதிகள், குறைபாடுகள்

தகுதிகள் :

1. கூட்டுச் சராசரியைப் போல் இதுவும் நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஓர் அளவாகும்.

2. இது கொடுத்துள்ள எல்லா தனி அம்சங்களையும் சார்ந்ததாகும்.

3. பெருக்குச் சராசரி கணக்கியல் வழித் துறைகளுக்கு உட்படும் தன்மை வாய்ந்தது.

4. இது சிறிய அம்சங்களுக்கும் முக்கியத்துவம் அளிக்கிறது. இவ் வழியில் இது கூட்டுச் சராசரியை விடச் சிறந்தது.

குறைபாடுகள் :

1. பெருக்குச் சராசரி எளிதான முறையில் கணக்கிட ஏதுவாக இல்லை.

2. இதை எளிதில் புரிந்து கொள்ள இயலாது.

3. தனி அம்சங்களில் யாதேனும் ஒன்றின் மதிப்பு பூச்சியமெனின், பெருக்குச் சராசரியும் பூச்சியமாகும். இவ் வகைகளில் பெருக்குச் சராசரியைக் கணக்கிட முடியாது.

4. கூட்டுச் சராசரியைப் போலவே பெருக்குச் சராசரி கொடுக்கப்பட்டுள்ள அம்சங்களில் யாதேனும் ஒன்ருக இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

5 இது நிலையற்றது. (unstable)

15-8. இசைச் சராசரி (Harmonic Mean) :

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனும் n மதிப்புகளின் இசைச் சராசரி

$$b = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

அலைப்பரவலில் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற n மதிப்புகளின் அலைவெண்கள் முறையே $f_1, f_2, \ldots, f_n$ எனின், பெருக்குச் சராசரி

$$b = \frac{N}{\left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_n}{x_n}\right)}, \quad N = \Sigma f_i.$$

மாதிரி 4 :

எட்டு குடும்பங்களது சராசரி மாத வருமானம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி காண்க.

குடும்பம் :	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
வருமானம் : (ரூபாயில்)	70,	14,	500,	75,	8.	250,	9,	42

கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = \frac{70 + 14 + 500 + 75 + 8 + 250 + 9 + 42}{8}$$

$$= \frac{968}{8} = 121$$

பெருக்குச் சராசரி :

$$g = (70 \cdot 14 \cdot 500 \cdot 75 \cdot 8 \cdot 250 \cdot 9 \cdot 42)^{1/8}$$

$$\log g = \frac{1}{8} [\log 70 + \log 14 + \log 500 + \log 75 + \log 8 + \log 250 + \log 9 + \log 42]$$

x	$\log x$
70	1·8451
14	1·1461
500	2·6990
75	1·8751
8	0·9031
250	2·3979
9	0·9956
42	1·6232
	13·4851

$$\therefore \quad \log g = \frac{1}{8}(13.4851) = 1.6856$$

$$\therefore \quad g = \text{Anti log } 1.6856$$

$$= 48.49$$

எனவே பெருக்குச் சராசரி = 48·49

இசைச் சராசரி

$$b = \frac{1}{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{70} + \frac{1}{14} + \frac{1}{500} + \frac{1}{75} + \frac{1}{8} + \frac{1}{250} + \frac{1}{9} + \frac{1}{42}\right)}$$

x	$\frac{1}{x}$
70	0·01429
14	0·07143
500	0·00200
75	0·01333
8	0·12500
250	0·00400
9	0·11111
42	0·02381
	0·36547

$$\therefore \quad b = \frac{1}{\frac{1}{8}(0{\cdot}36547)} = \frac{1}{0{\cdot}04568}$$

$$= 21{\cdot}89$$

எனவே, இசைச் சராசரி = 21·89.

15-9. இசைச் சராசரியின் தகுதிகள், குறைபாடுகள்

தகுதிகள் :

1. கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி போன்று இசைச் சராசரியும் நன்கு வரையறுக்கப் பட்டதாகும்.

2. மற்ற இரு சராசரிகள்போல் இதுவும் எல்லாத் தனி அம்சங்களையும் சார்ந்ததாகும்.

3. இதுவும் கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு உட்படும் தன்மை வாய்ந்தது.

4. பெருக்குச் சராசரியைப்போல், இதுவும் சிறிய அம்சங்களுக்கு அதிக முக்கியத்துவம் கொடுக்கிறது.

குறைபாடுகள் :

1. இசைச் சராசரியை எளிதில் கணக்கிட்டுப் பெறமுடியாது.

2. இதை எளிதில் புரிந்துகொள்ள இயலாது.

3. கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி போலவே இதுவும் தொடரில் இல்லாத அம்சமாக இருக்கக்கூடும்.

4. பொருளாதார விவரங்களை அன்வயப்படுத்த இது பயன்படாது.

5. இது நிலையற்றது. தனி அம்சங்களில் ஏற்படும் சிறு பிழைகள் இசைச் சராசரியை அதிகமாகப் பாதிக்கும்.

15-10. இடைநிலை (Median)

ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதப்பட்ட அம்சங்களின் நடுஉறுப்பு இடைநிலை எனப்படும். வரிசையிலுள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப் படையிலிருப்பின், நடு உறுப்பு ஒன்றுதானிருக்கும்; அதுவே இடைநிலையாகும். எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையிலிருப்பின், இரு நடு உறுப்புகள் இருக்கும்; அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி இடைநிலையாகும்.

மாதிரி 5 :

பின்வரும் A, B என்ற இரு தொடர்களின் இடைநிலைகள் காண்க.

A : 10, 17, 8, 9, 12, 6, 2.

B : 9, 19, 8, 7, 7, 4, 12, 13, 1, 3.

தொடர் A

வரிசை எண்	அம்சங்களின் அளவு
1	2
2	6
3	8
4	9
5	10
6	12
7	17

இடைநிலை $M = \dfrac{7+1}{2}$-ன் அளவு

$= 4$-ன் அளவு

$= 9$

எனவே தொடர் A-ன் இடைநிலை 9 ஆகும்.

தொடர் B :

வரிசை எண்	அம்சங்களது அளவு
1	1
2	3
3	4
4	6
5	6
6	8
7	9
8	12
9	13
10	19

இடைநிலை $M = \frac{10+1}{2}$-ன் அளவு

$= 5 \cdot 5$-ன் அளவு

$= \frac{5\text{-ன் அளவு} + 6\text{-ன் அளவு}}{2}$

$= \frac{6+8}{2} = 7,$

எனவே, தொடர் B-ன் இடைநிலை 7.

அலைப்பரவலின் இடைநிலை

ஓர் அலைப்பரவலில், $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பைக் குவிவு அலைவெண்ணாகக் கொண்ட அம்சத்தின் மதிப்பு இடைநிலையாகும்.

இடைநிலை மெய்ப்பிரிவின் கீழ் எல்லை l, அப்பிரிவின் அலைவெண் f, பிரிவு இடைவெளி C, l எனும் கீழெல்லை வரைக் குவிவு அலைவெண் m எனின், இடைநிலை M பின்வரும் சூத்திரத்திலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$M = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C.$$

மாதிரி 6 :

பின்வரும் விவரங்களின் இடைநிலை காண்க.

எடை	65—69	70—74	75—79	80—84	85—89
அலைவெண்	5	10	20	25	55

எடை	90—94	95—99	100—104	105—109
அலைவெண்	40	20	10	5

பிரிவு	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
65 — 69	5	5
70 — 74	10	15
75 — 79	20	35
80 — 84	25	60
85 — 89	55	115 — $\frac{N}{2}$
90 — 94	40	155
95 — 99	20	175
100 — 104	10	185
105 — 109	5	190

$$\frac{N}{2} = \frac{190}{2} = 95$$

இடைநிலை மெய்ப்பிரிவு 84·5 — 89·5

$$\therefore \quad l = 84{\cdot}5, \ \frac{N}{2} = 95, \quad m = 60$$

$$C = 5, \ f = 55.$$

$$\therefore \quad M = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 84.5 + \frac{95 - 60}{55} \times 5$$

$$= 84.5 + \frac{35}{11}$$

$$= 84.5 + 3.18$$

$$= 87.68$$

எனவே இடைநிலை 87·68

மாதிரி 7 :

பின் வரும் விவரங்களுக்கு இடைநிலை காண்க.

மதிப்பு	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
அலைவெண்	5	6	15	10	5	4	3	2

மதிப்பெண்கள்	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்கள்
5 — 10	5	5
10 — 15	6	11
15 — 20	15	26 $\leftarrow \frac{N}{2}$.
20 — 25	10	36
25 — 30	5	41
30 — 35	4	45
35 — 40	3	48
40 — 45	2	50
மொத்தம்	50	50

$$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

இடைநிலை மெய்ப்பிரிவு 15 — 20.

$$\therefore \quad l = 15,\ f = 15,\ \frac{N}{2} = 25$$

$$m = 11,\ C = 5$$

$$\therefore \quad M = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 15 + \frac{25 - 11}{15} \times 5$$

$$= 15 + \frac{70}{15}$$

$$= 15 + 4{\cdot}66$$

$$= 19{\cdot}66\ldots$$

$$= 19{\cdot}67.$$

எனவே, இடைநிலை 19·67.

15-11. இடைநிலையின் தகுதிகள், குறைபாடுகள்

தகுதிகள் :

(1) இது நன்கு வரையறுக்கப்பட்டது.

(2) இது எளிதில் கணக்கிட ஏதுவாக உள்ளது.

(3) இது எளிதில் புரிந்துக்கொள்ளக் கூடியது.

(4) மிக உயர்ந்த அல்லது மிகத் தாழ்ந்த அச்சங்களினுல் இது பாதிக்கப்படாதது. எனவே, இது கூட்டுச் சராசரியைவிட இவ்வகையில் சிறந்ததாகும்.

(5) அனேக வகைகளில் இதைக் கணக்கிடாமலேயே கண்டுபிடித்துவிடலாம்.

குறைபாடுகள் :

(1) அனேக சமயங்களில் இது சரியான அளவாக இராது. எடுத்துக்காட்டாக, 5, 10, 15, 17, 18, 50, 70, 80, 90 என்ற 9 மதிப்புகளின் இடைநிலை 18. ஆனால் இது சரியான அளவு அல்ல என்பது தெளிவு.

(2) இடைநிலை கணக்கியல் வழித்துறைகளுக்கு உட்படும் தன்மை வாய்ந்ததல்ல.

(3) ஓர் அலைப்பரவலில், அலைவெண் அதற்குரிய பிரிவில் சீராகப் பரவியுள்ளது என்ற தற்கோளின் மீதே இடைநிலை கணக்கிடப்படுகிறது. ஆனால், அனேக சமயங்களில் அலைவெண்கள் சீராகப் பரவியிருப்பதில்லை.

(4) ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதுவது சில சமயங்களில் எளிதாக இருப்பதில்லை.

(5) இடைநிலை நிலையானதல்ல.

15-12. முகடு (Mode)

மிகப்பெரிய அலைவெண்ணைப்பெற்ற அர்சம் முகடு எனப்படும். விவரங்களைப் பிரிவுத் தூரங்களாக வரிசைப்படுத்தப்படின், மிகப் பெரிய அலைவெண்ணைப்பெற்ற பிரிவு 'முகட்டுப் பிரிவு' எனவும், அப்பிரிவின் மைய மதிப்பு 'முகடு' எனவும் கூறப்படும்.

சில சமயங்களில் பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகடு கணக்கிடப்படும்.

$$Z = l + \frac{c f_2}{f_1 + f_2}.$$

இங்கு முகட்டுப்பிரிவின் கீழெல்லை l, பிரிவுத்தூரம் c, முகட்டுப் பிரிவின் முந்தைய, பிந்தைய பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் முறையே f_1, f_2 ஆகும்.

மாதிரி 8 :

மாதிரி கணக்கு 7-ல் உள்ள விவரங்களுக்கு முகடு காண்க.

முகட்டுப்பிரிவு 15—20.

முகட்டுப்பிரிவின் கீழ் எல்லை $l = 15$

பிரிவுத்தூரம் $c = 5$

முந்தைய. பிந்தைய பிரிவுகளின் அலைவெண்கள் $\left.\right\}$ $f_1 = 6$, $f_2 = 10$

$$\therefore \quad Z = l + \frac{c f_2}{f_1 + f_2}$$

$$= 15 + \frac{5 \cdot 10}{6 + 10}$$

$$= 15 + \frac{50}{16}$$

$$= 18 \cdot 125$$

15–13. நடைமுறை சூத்திரம் (Empirical Formula)

ஒரு சமச்சீர் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒரே மதிப்புக் கொண்டிருக்கும். அவ்வளவாக சமச்சீரற்ற ஏனைய பரவல்களுக்குப் பின்வரும் நடைமுறை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகடு காணலாம்.

(கூட்டுச் சராசரி − முகடு) = 3 (கூட்டுச் சராசரி − இடைநிலை)

இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகடு காணின், பொருட்படுத்தும் அளவுக்குப் பிழை இராது.

மாதிரி 9 :

பின்வரும் அலைப்பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை காண்க. நடைமுறை சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முகடு காண்க

x	f	x	f
40 — 41·9	2	52 — 53·9	40
42 — 43·9	8	54 — 55·9	25
44 — 45·9	14	56 — 57·9	13
46 — 47·9	33	58 — 59·9	8
48 — 49·9	44	60 — 61·9	2
50 — 51·9	51		
		மொத்தம்	240

மைய மதிப்பு x	அலை வெண் f	$d = \frac{x-50\cdot95}{2}$	$f.d$ +	$f.d$ −	குவிவு அலைவெண் Cf
40·95	2	−5		−10	2
42·95	8	−4		−32	10
44 95	14	−3		−42	24
46·95	33	−2		−66	57
48 95	44	−1		−44	101
					$\rightarrow \frac{N}{2} = 120$
50·95	51	0	0		152
52·95	40	+1	40		192
54·95	25	+2	50		217
56·95	13	+3	39		230
58·95	8	+4	32		238
60·95	2	+5	10		240
	240		+171	−194	
				−23	

கூட்டுச் சராசரி :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} \times C$$

$$= 50\cdot95 + \frac{-23}{240} \times 2$$

$$= 50\cdot95 - \frac{23}{120}$$

$$= 50\cdot95 - \cdot192$$

$$= 50\cdot758$$

இடைநிலை :

$$\frac{N}{2} = 120.$$

∴ இடைநிலைப் பிரிவு 49·95 – 51·95

$$M = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 49{\cdot}95 + \frac{120 - 101}{51} \times 2$$

$$= 49{\cdot}95 + \frac{38}{51}$$

$$= 49{\cdot}95 + {\cdot}745 = 50{\cdot}695$$

முகடு :

(கூட்டுச் சராசரி-முகடு) = 3 (கூட்டுச் சராசரி- இடைநிலை)

கூட்டுச் சராசரி = 50.758

இடைநிலை = 50.695

முகடு = x (என்க).

$$\therefore (50.758 - x) = 3\,(50.758 - 50.695)$$
$$= 3\,(0.063)$$
$$= 0.189$$

$$\therefore x = 50.758 - 0.189$$
$$= 50.569$$

எனவே முகடு = 50.569

பயிற்சி 15.

1. பின் வருவது 30 தொழிலாளர்களது வார ஊதியமாகும். இதன் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடுக.

14, 18, 16, 18, 16, 19, 15, 20, 22, 17
13, 16, 15, 15, 24, 11, 12, 12, 23, 21
14, 20, 20, 17, 17, 18, 21, 19, 22, 23

2. பின் வரும் விவரங்களுக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்க.

x : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 21, 25, 28

f : 7, 46, 165, 195, 189, 89, 28, 19, 9, 3

3. கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடுக

செலவு	அலைவெண்	செலவு	அலைவெண்
2 – 6	1	18 –	52
6 –	9	22 –	36
10 –	21	26 –	19
14 –	47	30 – 34	3

4. தொழிலாளர்களது மாத ஊதியங்களைக் குறிப்பிடும் அட்டவணை கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதன் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

மாத ஊதியம் x	அலைவெண் f	மாத ஊதியம் x	அலைவெண் f
12.5 – 17.5	2	37.5 – 42.5	4
17.5 – 22.5	22	42.5 – 47.5	6
22.5 – 27.5	19	47.5 – 52.7	1
27.5 – 32 5	14	52.5 – 57.5	1
32.5 – 37.5	5		

5. எட்டு குடும்பங்களின் மாத வருமானம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசைச் சராசரி முதலியவை காண்க.

குடும்பம் :	A	B	C	D	E	F	G	H
வருமானம் :	70	10	500	75	8	250	8	42

6. 1929 ஆம் ஆண்டு அமெரிக்க நாட்டில் வெவ்வேறு வருமானங்கள் கொண்டவர்களது பட்டியல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. கூட்டுச் சராசரி கணக்கிடுக.

வருமானம் (1000 டாலர்களில்)	நபர்களின் எண் (இலட்சத்தில்)
1-க்கு கீழ்	15
1— 2	90
2— 3	81
3— 5	117
5— 10	66
10— 25	27
25— 50	6
50— 100	2
100—1000	2

7. 800 கார்ன் பயிர்களின் நீளப்பரவல் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இப்பரவலின் மையப்போக்கின் அளவைகளில் மூன்றினைக் கணக்கிடுக.

நீளம் (அங்குலம்)	கார்ன்கள்	நீளம் (அங்குலம்)	கார்ன்கள்
4·0	1	7·5	172
4·5	1	8·0	124
5·0	8	8·5	61
5·5	33	9·0	32
6·0	70	9·5	10
6·5	110	10·0	2
7·0	170		

8. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை ஆகியவை ஒவ்வொன்றும் 3·95 என நிறுவுக.

x	f	x	f
2·8	4	4·2	60
3·0	15	4·4	59
3·2	20	4·6	35
3·4	47	4·8	10
3·6	63	5·0	8
3·8	78	5·2	4
4·0	88		

9. கீழ்க்காணும் அலைப்பரவலில் 5-வது அலைவெண் காணப் படவில்லை. கூட்டுச் சராசரி 106 எனின், அதைக் கணக்கிடுக.

ரூபாய்	அலைவெண்	ரூபாய்	அலைவெண்
50— 60	1	100—110	155
60— 70	6	110—120	75
70— 80	20	120—130	52
80— 90	41	130—140	21
90—100	...	140—150	15

10. பின்வரும் எடைப் பரவலிலிருந்து 'ஓகைவ்' வரைந்து வரையிலிருந்து இடைநிலை, முகட்டினைக் காண்க. கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

பவுண்டுகள்	அலைவெண்	பவுண்டுகள்	அலைவெண்
85	2	120	30
90	4	125	23
90	12	130	16
100	20	135	10
105	28	140	6
110	35	145	3
115	36		

11. பின்வரும் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு கணக்கிடுக.

மாத ஊதியம் (ரூபாய்)	தொழிலாளர்கள் எண்ணிக்கை
20	8
21	10
22	11
23	16
24	25
25	25
26	15
27	9
28	6

12. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குரிய இடைநிலை காண்க.

வயது x	மணமான பெண்கள்	வயது x	மணமான பெண்கள்
0—5	3	35—40	1292
5—10	31	40—45	963
10—15	410	45—50	762
15—20	1809	50—55	531
20—25	2446	55—60	317
25—30	2223	60—65	156
30—35	1723	65—70	59
		70—75	37

13. பாட்னு சர்வகலாசாலையில் 1937 ஆம் ஆண்டு மெட்ரிகுலேசன் தேர்வு எழுதிய மாணவர்களது எண்ணிக்கை, வயது கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இடைநிலை, முகடு வயதைக் கணக்கிடுக.

வயது	எண்ணிக்கை	வயது	எண்ணிக்கை
12—	5	18—	981
13—	48	19—	794
14—	189	20—	515
15—	303	21—	74
16—	522	22—	—
17—	980		
		மொத்தம்	4811

14. பின்வரும் ஊதியப் பரவலில் முகடு ஊதியம் கணக்கிடுக.

ஊதியம் (ரூபாய்)	அலைவெண் f
12·50 — 17·50	4
17·50 — 22·50	44
22·50 — 27·50	38
27·60 — 32·50	28
32·50 — 37·50	6
37·50 — 42·50	8
42·50 — 47·50	12
47·50 — 52·50	2
52·50 — 57·50	2

15. சுமாரான சமச்சீர் கொண்ட ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரி முகடு முதலியவை முறையே 16", 20·2" எனின், முகடைக் கணக்கிடுக.

16. கீழ்காணும் வயது பரவலுக்குரிய இடைநிலை, முகடு காண்க.

வயது	20—25	25—30	30—35	35—40
அலைவெண்	50	60	70	150

வயது	40—45	45—50	50—55	55—60
அலைவெண்	120	100	60	40

16. பரவுகை அளவைகள்

16-1. மையப்போக்கின் அளவை, பரவலின் முக்கியப் பண்பு களில் ஒன்றைத்தான் வெளிப்படுத்தும். ஆனால், சேகரிக்கப் பட்ட புள்ளி விவரம் எந்த அளவில் மையப் போக்கைச் சுற்றிப் பரவிக் கிடக்கின்றது என்பதை அறிந்தால், அப்புள்ளி விவரத்தின் பிற தன்மைகளையும் வேறொரு புள்ளி விவரத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும் ஏதுவாகும். பரவகை அளவைகள் வருமாறு :

(1) வீச்சு (Range)

(2) கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation)

(3) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation)

(4) தரவிலக்கம் (Standard Deviation).

16-2. வீச்சு

ஒரு பரவலில் உள்ள மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புகளது வேறுபாடு வீச்சு (Range) எனப்படும். ஒரு நிறுவனத்தில் வேலை பார்க்கும் நபர்கள் பெறும் மாத வருமானத்தில் மிகப் பெரியது ரூ. 1000, மிகச் சிறியது ரூ. 200 எனின், அக் குழுவினது வீச்சு $(1000 - 200) = 800$ ஆகும்.

16-3. கால்மான விலக்கம்

ஓர் அலைப் பரவலில், $\frac{N}{4}$ என்ற மதிப்பைக் குவிவு அலை வெண்ணாகக் கொண்ட அம்சத்தின் மதிப்பு Q_1 எனக் குறிப்பிடப் பட்டு முதல் கால்மானம் (First Quartile) எனப்படும்.

முதல் கால்மான மெய்ப் பிரிவின்கீழ் எல்லை l, அப்பிரிவின் அலைவெண் f, பிரிவு இடைவெளி C, l எனும் கீழெல்லை வரை குவிவு அலைவெண் m எனின், முதல் கால்மானம் Q_1 பின் வரும் சூத்திரத்திலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - m}{f} \times C.$$

ஓர் அலைப் பரவலில், $\frac{3N}{4}$ என்ற மதிப்பைக் குவிவு அலை வெண்ணாகக் கொண்ட அம்சத்தின் மதிப்பு மூன்றாம் கால் மானம் எனப்படும். இது Q_3 எனக் குறிப்பிடப்படும்.

மூன்றாம் கால்மான மெய்ப்பிரிவின்கீழ் எல்லை l, அப்பிரிவின் அலைவெண் f, பிரிவு இடைவெளி C, l எனும் கீழெல்லை வரை குவிவு அலைவெண் m எனின்,

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f} \times C.$$

இடை நிலையும், கால்மானங்களும் குவிவு அலைவெண்களை நான்கு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும்.

கால்மான விலக்கம் $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது ஓர் அலைப்பரவலில் முதல், மூன்றாம் கால்மானங்கள் முறையே Q_1 Q_3, எனின்,

$$\text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}.$$

மாதிரி 1 :

கீழ்க் காணும் அலைப் பரவலுக்கு மூன்று கால் மானங்களையும், கால் மான விலக்கத்தையும் காண்க.

பிரிவு	அலைவெண்	பிரிவு	அலைவெண்
5 — 10	5	25 — 30	5
10 — 15	6	30 — 35	4
15 — 20	15	35 — 40	2
20 — 25	10	40 — 45	2

பிரிவு	அலைவெண்	குவிவு அலைவெண்
5 – 10	5	5
10 – 15	6	11
15 – 20	15	26 ← $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{2}$
20 – 25	10	36 ← $\frac{3N}{4}$.
25 – 30	5	41
30 – 35	4	45
35 – 40	2	47
40 – 45	2	49

$$\frac{N}{4} = \frac{49}{4} = 12.25,\ \frac{N}{2} = 24.50,\ \frac{3N}{4} = 36.75.$$

முதல் கால் மான மெய்ப் பிரிவு 15 — 20.

$$\therefore\ l = 15,\ m = 11,\ f = 15,\ C = 5$$

$$\therefore\ Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - m}{f} \times C$$

$$= 15 + \frac{12.25 - 11}{15} \times 5$$

$$= 15 + \frac{1.25}{3}$$

$$= 15 + .417$$

$$= 15.417.$$

எனவே, முதல் கால் மான விலக்கம்

$$Q_1 = 15.417.$$

இரண்டாம் கால் மானம் (அல்லது) இடைநிலை மெய்ப்பிரிவு 15—20

$$\therefore\ l = 15,\ m = 11,\ f = 15,\ C = 5$$

$$\therefore \quad M = Q_2 = \quad l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 15 + \frac{24{\cdot}50 - 11}{15} \times 5$$

$$= 15 + \frac{13{\cdot}50}{3}$$

$$= 15 + 4{\cdot}50$$

$$= 19{\cdot}50$$

எனவே இரண்டாம் கால்மானம் அல்லது இடைநிலை,

$$M = Q_2 = 19{\cdot}50$$

மூன்றும் கால்மானம் மெய்ப்பிரிவு 25—30.

$$\therefore \quad l = 25, \; m = 36, \; f = 5, \; C = 5.$$

$$\therefore \quad Q_3 = \quad l + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f} \times C$$

$$= 25 + \frac{36{\cdot}75 - 36}{5} \times 5$$

$$= 25 + 0{\cdot}75$$

$$25{\cdot}75$$

எனவே மூன்றும் கால்மானம் $Q_3 = 25{\cdot}75$.

$$\therefore \quad \text{கால்மான விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{25{\cdot}75 - 15{\cdot}417}{2}$$

$$= \frac{10{\cdot}333}{2}$$

$$= 5{\cdot}1665$$

எனவே, கால்மான விலக்கம் = 5·17

16-4. கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

யாதேனும் ஒரு சராசரியிலிருந்து தனி அம்சங்களது விலக்கங்களின் எண்ணளவின் கூட்டுச் சராசரி 'கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்' எனப்படும்.

ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ எனின், கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து தனி அம்சங்களின் விலக்கங்களது எண்ணளவுகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$\frac{1}{N} \Sigma_i f_i \mid x_i - \bar{x} \mid , \; N = \Sigma_i f_i.$$

16-5. ஓர் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் காணுதல்

பிரிவுத் தூரங்களின் மைய மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனவும், அவற்றின் ஒத்த அலைவெண்கள் $f_1, f_2, \ldots, f_n$ எனவும் கொள்வோம்.

A என்பது x_r, x_{r+1} என்பனவற்றின் இடையில் அமைந்திருக்கிறது என்க. பின், A-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களின்

கூடுதல் $\sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - A \mid$.

எதிரெண் விலக்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i \, (x_i - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i \, (x_i - l + l - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i \, (x_i - l) + \sum_{i=1}^{r} f_i \, (l - A)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i \, (x_i - l) + (l - A) \sum_{i=1}^{r} f_i$$

எதிரெண் விலக்கங்களின் கூடுதல்

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_i - A)$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_i - l + l - A)$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (x_i - l) + (l - A) \sum_{i=r+1}^{n} f_i$$

எனவே, விலக்கங்களின் எண்ணளவு கூடுதல்

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - l \mid + \sum_{i=r+1}^{n} f_i \mid x_i - l \mid$$

$$+ (A - l) \sum_{i=1}^{r} f_i + (l - A) \sum_{i=r+1}^{n} f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - l \mid + (A - l) \left\{ \sum_{i+1}^{r} f_i - \sum_{i=r+1}^{n} f_i \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - l \mid + (A - l)(N_1 - N_2)$$

இங்கு N_1 = முதல் r அலைவெண்களது கூடுதல்.

N_3 = எஞ்சிய அலைவெண்களது கூடுதல்.

எனவே, A-லிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலக்கங்களது எண்ணளவைகளின் கூட்டுச் சராசரி

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - A \mid + (A - l)(N_1 - N_2)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

மாதிரி 2 :

கீழ்க்காணும் அலைவெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து 'கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்' கணக்கிடுக.

பிரிவுகள்	அலைவெண்கள்	பிரிவுகள்	அலைவெண்கள்
20 — 24	4	50 — 54	54
25 — 29	9	55 — 59	39
30 — 34	13	60 — 64	25
35 — 39	16	65 — 69	13
40 — 44	26	70 — 74	6
45 — 49	43	75 — 59	2
			250

பிரிவு	மைய மதிப்பு	அலை வெண் (f)	$d = \frac{x-52}{5}$	$f.d$
20 — 24	22	4	— 6	— 24
25 — 29	27	9	— 5	— 45
30 — 34	32	13	— 4	— 52
35 — 39	37	16	— 3	— 48
40 — 44	42	26	— 2	— 52
45 — 49	47	43	— 1	— 43
50 — 54	52	54	0	0
55 — 59	57	39	1	39
60 — 64	62	25	2	50
65 — 69	67	13	3	39
70 — 74	72	6	4	24
75 — 79	77	2	5	10
		250		— 264 + 162 = — 102.

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} \times C$$

$$= 52 + \frac{-102}{250} \times 5$$

$$= 52 - 2.04$$

$$= 49.96.$$

இது 45 — 50 பிரிவில் உள்ளது.

x	f_i		$\lvert d_i \rvert$	$f_i \lvert d_i \rvert$
20 — 24	4		5	20
25 — 29	9		4	36
30 — 34	13		3	39
35 — 39	16	N_1	2	32
40 — 44	26		1	26
45 — 49	43		0	0
50 — 54	54		1	54
55 — 59	39		2	78
60 — 64	25	N_2	3	75
65 — 69	13		4	52
70 — 74	6		0	30
75 — 79	2		6	12
	250			454

இங்கு $N_1 = 4 + 9 + 13 + 16 + 26 + 43 = 111$

$$N_2 = 54 + 39 + 25 + 13 + 6 + 2 = 139$$

எனவே கூட்டுச் சராசரி விலக்கமானம்

(கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து)

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \mid x_i - A \mid + (A - l)(N_1 - N_2)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$= \frac{(454 \times 5) + (49{\cdot}96 - 47)(111 - 139)}{250}$$

$$= \frac{2270 + (2{\cdot}96)(-28)}{250}$$

$$= \frac{2270 - 82{\cdot}88}{250}$$

$$= \frac{2187{\cdot}12}{250} = 8{\cdot}75$$

16-6. தர விலக்கம் (Standard Deviation)

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து தனி மதிப்புகளின் விலக்கங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுச் சராசரியினது நேரெண் வர்க்கமூலம் தர விலக்கம் எனப்படும். இது σ எனக் குறியிடப்பெறும்.

எண் கூட்டங்களுக்கு

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

அலை எண் பரவலுக்கு

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma f_i \, (x_i - \bar{x})^2}$$

குறிப்பு: தர விலக்கம் குறைவாகவிருப்பின், புள்ளி விவரம் சராசரியைச்சுற்றி நெருக்கமாகப் பரவியுள்ளது எனப்பொருள்

மாதிரி 3 :

கீழ்க்காணும் எண் கூட்டங்களுக்கு σ காண்க.

82, 80, 76, 48, 64, 72, 76, 90, 62, 50.

$$\bar{x} = \frac{82+80+76+48+64+72+76+90+62+50}{10}$$

$$= \frac{700}{10} = 70.$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள்

12, 10, 6, −22, −6, 2, 6, 20, −8, −20.

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{12^2+10^2+6^2+22^2+6^2+2^2+6^2+20^2+8^2+20^2}{10}$$

$$= \frac{144+100+36+484+36+4+36+400+64+400}{10}$$

$$= \frac{1704}{10} = 170{\cdot}4 \qquad \therefore \quad \sigma = 13{\cdot}1$$

16-7. $s = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - A)^2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}$

எனின் $s^2 = \sigma^2 + d^2$, $d = \bar{x} - A$ **என நிறுவுதல். இங்கு** A **யாதேனும் ஒரு சராசரி.**

நிரூபணம் :

$$x_i - A = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - A)$$

$$\therefore \quad (x_i - A)^2 = (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - A)$$

$$\therefore \quad \Sigma f_i (x_i - A)^2$$

$$= \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 + \Sigma f_i (\bar{x} - A)^2 + 2\Sigma f_i (x_i - \bar{x})(\bar{x} - A)$$

$$= \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 \Sigma f_i + 2(\bar{x} - A)\Sigma f_i (x_i - \bar{x})$$

$$= \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 N \quad \because \Sigma f_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

$$= \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 + N d^2, \; d = \bar{x} - A.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - A)^2 = \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 + d^2$$

அதாவது $s^2 = \sigma^2 + d^2$.

குறிப்பு : $\sigma^2 = s^2 - d^2$. எனவே, தர விலக்கம்தான் ஏனைய வர்க்கமூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கங்களில் மிகச் சிறியதாகும்.

மாதிரி 4 :

பின் வரும் எண் பரவலுக்குத் தர விலக்கம் σ காண்க.

x	f	x	f
20 — 24	4	50 — 54	54
25 — 29	9	55 — 59	39
30 — 34	13	60 — 64	25
35 — 39	16	65 — 69	13
40 — 44	26	70 — 74	6
45 — 49	43	75 — 79	2
			250

பிரிவுகள்	மைய மதிப்பு	f_i	d_i	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
20—24	22	4	−6	−24	144
25—29	27	9	−5	−45	225
30—34	32	13	−4	−52	208
35—39	37	16	−3	−48	144
40—44	42	26	−2	−52	104
45—49	47	43	−1	−43	43
50—54	52	54	0	0	0
55—59	57	39	1	39	39
60—64	62	25	2	50	100
65—69	67	13	3	39	117
70—74	72	6	4	24	96
75—79	77	2	5	10	50
				−274 +162 = −112	1270

$$\sigma^2 = \left[\frac{1270}{250} - \left(\frac{112}{250}\right)^2\right] 5^2$$

$$= [5{\cdot}08 - ({\cdot}45)^2]\ 25$$

$$= 119{\cdot}44$$

$$\therefore\ \sigma = 10{\cdot}9$$

16-8. இரு குழுக்களது தர விலக்கம்

n_1 அம்சங்களது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$, தர விலக்கம் σ_1 ; n_2 அம்சங்களது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$, தர விலக்கம் σ_2 எனின், (n_1+n_2) அம்சங்களது தர விலக்கம் σ பின்வரும் சூத்திரத்திலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$\sigma^2 = \frac{n_1(\sigma_1{}^2 + d_1{}^2) + n_2(\sigma_2{}^2 + d_2{}^2)}{n_1 + n_2}$$

இங்கு $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$, $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$

$\bar{x}$, $(n_1 + n_2)$ அம்சங்களின் கூட்டுச் சராசரி.

நிரூபணம் :

வரையறையின்படி

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\therefore\ (n_1 + n_2)\,\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n_1} [x_i - \bar{x}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} [(x_i - \bar{x}_1)^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + 2\,(x_i - \bar{x}_1)(\bar{x}_1 - \bar{x})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x}_1 - \bar{x})^2$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)(\bar{x}_1 - \bar{x})$$

$$= n_1 \sigma_1^2 + n_1 d_1^2 \qquad [\because \Sigma (x_i \bar{x}_1) = 0]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_1 d_1^2 \quad , \quad d_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x})$$

இவ்வாறே $\displaystyle\sum_{i=n_1+1}^{n_2} (x_i - \bar{x})^2 = n_2 \sigma_2^2 + n_2 d_2^2 \ , \ d_2 = (\bar{x}_2 - \bar{x})$

$$\therefore \ (n_1+n_2)\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= n_1 \sigma_1^2 + n_1 d_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_2 d_2^2$$

$$\therefore \ \sigma^2 = \frac{n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}$$

மாதிரி 5 :

500 தொழிலாளர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி ஊதியம், தர விலக்கம் என்பவைகளின் மதிப்பு முறையே 50 ரூபாய், 5 ரூபாய். 500 தொழிலாளர்கள் கொண்ட பிறிதொரு குழுவின் கூட்டுச் சராசரி, தர விலக்கம் முறையே 60 ரூபாய், 6 ரூபாய் எனின், இவ்விரு குழுக்களின் இணைந்த தரவிலக்கம் காண்க.

இங்கு,

$n_1 = 500 \qquad n_2 = 500$

$\bar{x}_1 = 50 \qquad \bar{x}_2 = 60$

$\therefore$ இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{500.50 + 500.60}{500 + 500}$$

$$= \frac{25000 + 30000}{1000}$$

$$= \frac{55.000}{1000} = 55.$$

மீண்டும்,

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 50 - 55 = -5$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 60 - 55 = 5.$$

$$\sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 6.$$

∴ இணைந்த குழுவின் தர விலக்கம்

$$\sigma^2 = \frac{n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{500\,(25 + 25) + 500\,(36 + 25)}{500 + 500}$$

$$= \frac{500\,(50) + 500\,(61)}{1000}$$

$$= \frac{500\,(50 + 61)}{1000}$$

$$= \frac{111}{2} = 55.5$$

$$\therefore \sigma = 7{\cdot}45$$

மாதிரி 6 :

மூன்று டாக்டர்கள் மூன்று குழுவினரைப் பரிசோதனை செய்து கண்ட விவரம் வருமாறு :

டாக்டர்கள்	குழுவின் எண்ணிக்கை	கூட்டுச் சராசரி (பவுண்டில்)	தர விலக்கம் (பவுண்டில்)
A	50	113	6
B	60	120	7
C	90	115	8

இணைந்த குழுவின் தர விலக்கம் காண்க.

இங்கு $n_1 = 50,\quad n_2 = 60,\quad n_3 = 90.$

$\bar{x}_1 = 113,\quad \bar{x}_2 = 120,\quad \bar{x}_3 = 115.$

$\sigma_1 = 6,\quad \sigma_2 = 7,\quad \sigma_3 = 8$

இணைந்த குழுவின் கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

$$= \frac{50 \cdot 113 + 60 \cdot 120 + 90 \cdot 115}{50 + 60 + 90}$$

$$= \frac{5650 + 7200 + 10350}{200}$$

$$= \frac{23200}{200} = 116$$

இணைந்த குழுவின் தரவிலக்கம்

$$\sigma^2 = \frac{n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2) + n_3 (\sigma_3^2 + d_3^2)}{n_1 + n_2 + n_3}$$

இங்கு $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x} = 113 - 116 = -3$

$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x} = 120 - 116 = 4$

$d_3 = \bar{x}_3 - \bar{x} = 115 - 116 = -1.$

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{50 (36 + 9) + 60 (49 + 16) + 90 (64 + 1)}{50 + 60 + 90}$$

$$= \frac{50 \,.\, 45 + 60 \,.\, 65 + 90 \,.\, 65}{200}$$

$$= \frac{2250 + 3900 + 5850}{200}$$

$$= \frac{12000}{200}$$

$$= 60$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{60} = 7 \cdot 7$$

எனவே, இணைந்த குழுவின் தர விலக்கம்

$$\sigma = 7 \cdot 7$$

16-9. பரவுகைக்கெழு (Coefficient of Dispersion)

இரு அலைவுப் பரவல்களின் கூட்டுச் சராசரிகள் சமமெனின் அவற்றின் தரவிலக்கங்களைக் கொண்டு இரு பரவல்களை ஒப்பிடலாம். ஆனால், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகள் வெவ்வேறு மதிப்புகள் கொண்டவை எனின், அவற்றின் தரவிலக்கங்களைக் கொண்டு ஒப்பிட இயலாது. மேலும், வெவ்வேறு அலகுகளில் உள்ள அளவைகளை ஒப்பிடமுடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, இரு வித அலைவுப் பரவல்களில் ஒன்று மாணவர்களது எடைகளையும், மற்றது உயரங்களையும் கொண்டதாயிருப்பின் இரண்டின் அலகுகளும் வெவ்வாறானவையாகும். எனவே, இவ்வகை இருவித அலைவுப் பரவல்களை ஒப்பிட ஓர் அளவை தேவைப்படுகிறது. அத்தகைய அளவைகளில் ஒன்று $\frac{\text{தரவிலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ ஆகும்.

பிற அளவைகள் வருமாறு :

1. $\dfrac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

2. $\dfrac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

3. $\dfrac{\text{கால்மான விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை}}$

இவற்றைப் பரவுகைக் கெழுக்கள் என்கிறோம்.

குறிப்பாக $\dfrac{100\sigma}{\bar{x}}$ என்பதை மாறுவிகிதக்கெழு (Coefficient of Variation) என்கிறோம்.

மாதிரி 7 :

A, *B* என்ற இரு மாணவர்கள் வெவ்வேறு தேர்வுகளில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இவர்களில் நிலைப்புத்தன்மை அதிகமுடையவர் யார்?

A : 56, 60, 20, 50, 65, 65, 66, 68, 58, 67, 59, 54, 52, 69, 75, 52, 42, 60, 46, 48.

B : 78, 44, 86, 92, 84, 66, 84, 71, 89, 53, 87, 78, 73, 65, 46, 56, 65, 78, 54, 68.

மாணவன் A :

x_i	$d = x_i - 60$	d_i^2
56	−4	16
60	0	0
30	−30	900
50	−10	100
65	5	25
65	5	25
66	6	36
66	6	36
58	−2	4
67	7	49
59	−1	1
54	−6	36
52	−8	64
69	9	81
75	15	225
52	−8	64
42	−18	324
60	0	0
46	−14	196
48	12	144
	−60	2326

$$\therefore \quad \bar{x} = 60 + \frac{-60}{20}$$

$$= 60 - 3 = 57$$

$$\sigma^2 = \frac{2326}{20} - 3^2$$
$$= 116.3 - 9 = 107.3$$
$$\therefore \quad \sigma = 10.36.$$

எனவே, மாறு விகிதக் கெழு

$$= \frac{100\sigma}{x} = \frac{100 \times 10.36}{57} = 18.18$$

மாணவன் B :

x	$d_i = x_i - 70$	d_i^2
78	8	64
44	− 26	676
86	16	256
92	22	484
84	14	196
66	− 4	16
84	14	196
71	1	1
89	19	361
56	− 14	196
87	17	289
78	8	64
73	3	9
65	− 5	25
46	− 24	576
56	− 14	196
65	− 5	25
78	8	64
54	− 16	256
68	− 2	4
	+ 20	3954

$$\therefore \quad \bar{x} = 70 + \frac{20}{20} = 70 + 1 = 71.$$

$$\sigma^2 = \frac{3954}{20} - 1^2$$

$$= 197.7 - 1 = 196.7$$

$$\therefore \quad \sigma = 14.02.$$

எனவே மாறுவிகிதக் கெழு

$$= \frac{100\,\sigma}{\bar{x}} = \frac{100 \times 14{\cdot}02}{71}$$

$$= \frac{1402}{71} = 19{\cdot}75$$

மாணவன் A — கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 57$

மாணவன் B — கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 71$.

கூட்டுச் சராசரித் திறமையை அளக்கும் அளவை.

எனவே, B, A ஐ விடத் திறமை சாலி.

மாணவன் A —

மாறு விகிதக் கெழு $= 18{\cdot}18$

மாணவன் B —

மாறு விகிதக் கெழு $= 19{\cdot}75$

மாறு விகிதக் கெழு நிலைத் தன்மையை (Consistency) அளக்கும் அளவையாகும். இரு மாணவர்களில் யாருக்கு மாறு விகிதக் கெழு குறைவாக உள்ளதோ, அவர் நிலைப்புத் தன்மை அதிகமுடையவராவார். எனவே, மாணவன் A நிலைப்புத் தன்மை அதிகமுடையவராவார்.

பயிற்சி 16.1.

1. உலகில் 20 வெவ்வேறு ஆண்டுகளின் தங்கத்தின் அளவு கீழே தரப்பட்டுள்ளது. இதற்குக் கூட்டுச் சராசரியும், தர விலக்கமும் காண்க.

தங்கத்தின் அளவு (மில்லியன் பவுண்டில்) : 94, 95, 96, 93, 87, 79, 73, 69, 68, 67, 78, 82, 83, 89, 95, 103, 105, 117, 130, 97.

2. பின்வரும் இரு தொடர்களின் தர விலக்கங்கள் காண்க.

தொடர் A	தொடர் B
191	83
248	87
236	93
229	109
184	124
260	126
348	121
291	101
350	102
245	108

3. 10 ஆய்வுகளின் சராசரியும் தர விலக்கமும் கணக்கிட்ட பின்னர் ஒரு பிழை காணப்பட்டது. மாதிரிகளின் மதிப்புகளில் ஒன்று 326-க்குப் பதிலாக 236 என எழுதப்பட்டு விட்டது. இத் தவற்றுடன் கணக்கிடப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி, தர விலக்கம் முறையே 200·1, 51·6 எனின், சரியான தர விலக்கம் காண்க.

4. இரு மாதிரிகளின் அளவு 50,100. இவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 54·4, 50·3, தர விலக்கங்கள் முறையே 8, 7 எனின் இணைந்த மாதிரிகளின் கூட்டுச் சராசரியையும், தர விலக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

5. *A*, *B* என்ற இரு மாதிரிகளின் அளவைகள் வருமாறு: *A*, *B* இரண்டையும் இணைத்துப் பெறப்படும் மாதிரியின் கூட்டுச் சராசரி, தரவிலக்கம் காண்க.

மாதிரி	உருவ அளவு	கூட்டுச் சராசரி	தர விலக்கம்
A	20	44·8	8·3
B	30	47·3	6·5

6. ஒரு சமயத்தில் ஒரு நாட்டின் பார்லிமெண்டில் இருந்தவர்களின் வயது பரவல் வருமாறு: கால்மான விலக்கம், கூட்டுச்

சராசரி விலக்கம், தர விலக்கம், மாறு விகிதக் கெழு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

மைய ஆண்டுகள் : 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85

அலைவெண் : 3, 60, 132, 153, 139, 51, 2

7. கீழே தரப்பட்டுள்ள இரு தொடர்களுக்கும் மாறு விகிதக் கெழுக்கள் காண்க.

தொடர் A : 725, 700, 750, 650, 675, 725, 675, 725, 625, 675, 700, 675, 725, 675, 600, 650, 675, 625, 700, 650.

தொடர் B : 575, 625, 600, 575, 675, 625, 575, 550, 650, 625, 550, 700, 625, 600, 625, 650, 575, 675, 625, 600.

16-10. விலக்கப் பெருக்குத் தொகை (Moment)

ஓர் அலைவுப் பரவலில் A என்ற யாதேனும் ஒரு மூலப்புள்ளியைப் பற்றிய r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை $\frac{1}{N}\sum_{1}^{n} f\ (x_i - A)^r$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இது μ'_r எனக் குறியிடப்படும்.

$$\text{அதாவது } \mu'_r = \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} f_i\ (x_i - A)^r.$$

அதாவது r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, $(x=A)^r$ என்ற மாறியினது கூட்டுச் சராசரியாகும்.

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ஐப் பற்றிய r ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_r எனப்படும்.

$$\text{அதாவது } \mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\ (x_i + \bar{x})^r$$

இனி μ'_r, μ_r இவற்றுக்குள்ள தொடர்பைக் காண்போம்.

$$\mu'_0 = \frac{1}{N}\Sigma f_i\ (x_i - A)^0 = \frac{1}{N}\ \Sigma f_i = \frac{1}{N} \times N = 1.$$

$$\mu_1' = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - A)$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i - \frac{1}{N} \Sigma f_i A$$

$$= \frac{1}{N} [N \bar{x} - A \Sigma f_i]$$

$$= \frac{1}{N} [N \bar{x} - NA] = \bar{x} A.$$

$$\mu_2' = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - A)^2 = s^2,$$ முதலியன.

$$\mu_0 = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^0$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i = \frac{1}{N} . N = 1.$$

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i - \frac{1}{N} \bar{x} \Sigma f_i$$

$$= \frac{1}{N} [N \bar{x} - N \bar{x}] = 0$$

$$\mu_2 = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2,$$ முதலியன.

மேலும், $\mu_r = \frac{1}{N} \Sigma f_i - \bar{x})^r$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - A + A - \bar{x})^r$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i [(x_i - A) - (\bar{x} - A)]^r$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i (X_i - d)^r, \quad X_i = x_j - A$$

$$d = \bar{x} - A.$$

$$\therefore \quad \mu_r = \frac{1}{N} \Sigma f_i [X_i^r - r_{c1} X_i^{r-1} d + r_{c2} X_i^{r-2} d^2 + \dots + (-d)^r]$$

$$= \frac{1}{N} [\Sigma f_i X_i^r - r_{c1} d \Sigma f_i X_i^{r-1} + r_{c2} d^2 \Sigma f_i X_i^{r-2} - \dots$$

$$= \frac{1}{N} [\Sigma f_i (x_i - A)^r - r_{c1} d \Sigma f_i (x_i - A)^{r-1} + r_{c2} d^2 \Sigma f_i (x_i - A)^{r-2} - \dots]$$

$$= \mu'_r - r_{c1} d \mu'_{r-1} + r_{c2} d^2 \mu'_{r-2} - \dots$$

எனவே,

$$\mu_r = \mu'_r - r_{c1} (\bar{x} - A) \mu'_{r-1} + r_{c2} (x - A)^2 \mu'_{r-2} - \dots$$

$$\therefore \quad \mu_1 = \mu'_1 - (\bar{x} - A) \mu'_0$$

$$= '\mu_1 - (\bar{x} - A) = \mu'_1 - \mu'_1 = 0.$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - 2_{c1} (\bar{x} - A) \mu'_1 + (\bar{x} - A)^2 \mu'_0$$

$$= \mu'_2 - 2 \mu'_1 \mu'_1 + \mu'^2_1$$

$$= \mu'_2 - \mu'^2_1.$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3_{c1} (\bar{x} - A) \mu'_2 + 3_{c2} (\bar{x} - A)^2 \mu'_1 - (x - A)^3 \mu'_0$$

$$= \mu_3' - 3 \mu_1' \mu_2' + 3 \mu_1'^2 \mu_1' - \mu_1'^3$$

$$= \mu_3' - 3 \mu_1' \mu_2' + 3 \mu_1' - \mu_1'^3$$

$$= \mu_3' - 3 \mu_1' \mu_2' + 2 \mu_1'^3.$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4_{c1} (\bar{x} - A) \mu'_3 + 4_{c2} (\bar{x} - A)^2 \mu_2' - 4_{c3} (\bar{x} - A)^3 \mu_1' + (\bar{x} - A)^4 \mu'_0$$

$$= \mu_4' - 4 \mu_1' \mu_3' + 6 \mu_1'^2 \mu_2' - 4 \mu_1'^3 \mu_1' + \mu_1'^4$$

$$= \mu_4' - 4 \mu_1' \mu^{3\prime} + 6 \mu_1'^2 \mu_2' - 4 \mu_1'^4 + \mu_1'^4$$

$$= \mu_4' - 4 \mu_1' \mu_3' + 6 \mu_1'^2 \mu_2' - 3 \mu_1'^4.$$

16-11. கோட்டளவைகள் (Measures of Skewness)

பின்வரும் பரவலைக் கவனிப்போம் :

x :	1	2	3	4	5	6	7
f :	5	20	50	60	50	20	5

மதிப்பு 4-ன் இரு புறமும் சம தூரத்திலுள்ள மதிப்புகள் சமமான அலைவெண்களுடன் காணப்படுகிறது. இவ் வகைப் பரவல்கள் சமச்சீர் பரவல்கள் (Symmetrical Distribution) எனப் படும். இப் பரவலுக்கு ஓர் அலைவெண் வரை வரைந்தால், அது மைய மதிப்புடன் சமச்சீரான நிலையில் அமைந்திருக்கும்.

ஆனால், அனேக பரவல்கள் சமச்சீரற்ற தன்மையில் அமைந் திருக்கும். எனவே, அப்பரவல்கள் எத்துணை அளவிற்குச் சமச் சீரற்ற தன்மையில் அமைந்துள்ளன எனக் காண்பது அவசிய மாகும் ஒரு பரவல் சமச்சீரற்று இருப்பின், அத் தன்மையை அப்பரவலின் கோட்டம் (Skewness) என்கிறோம்.

அக் கோட்டத்தை அளக்கப் பல்வேறு அளவைகள் உள்ளன.

அவையாவன :

(1) $$\text{கோட்டம்} = \frac{\text{இடைநிலை} - \text{முகடு}}{\text{தர விலக்கம்}} = \frac{\bar{x} - z}{\sigma}$$

$$= \frac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி} - \text{இடைநிலை})}{\text{தர விலக்கம்}}$$

$$= \frac{3\,(\bar{x} - M)}{\sigma}$$

இவை இரண்டும் பியர்ஸன் முதலாவது. இரண்டாவது கோட்டக் கெழுக்கள் எனப்படும்.

(2) $$\text{கோட்டம்} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

(3) கோட்டம் $= \frac{\mu_3}{(\mu)^{3/2}}$

$$= \sqrt{\beta_1} \quad , \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}.$$

குறிப்பு :

(1) சமச்சீர் தன்மை கொட்ட பரவலுக்குக் கோட்டம் பூச்சியமாகும்.

(2) கோட்ட அளவை ஓர் எண்ணாகும்.

16-12. தட்டை அளவை (Kurtosis)

ஓர் அலைவுப் பரவலின் வரையினது உச்சியின் வளைவுத் தன்மை எவ்வாறு அமைகிறது என்று அளக்கும் அளவை 'தட்டை அளவை' (Kurtosis) எனப்படும்.

ஒரு பரவலின் தட்டை அளவை $\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ என வரையறுக்கப் படும். இது β_2 எனக் குறியிடப் படுகிறது.

அதாவது, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

$$= \frac{\mu_4}{\sigma^4} .$$

ஒரு சமச்சீர் பரவிலில் β_2-ன் மதிப்பு 3 எனக் கணக்கிடப் பட்டுள்ளது. $\beta_2 > 3$ எனின், அவ்வரை குறைத் தட்டை (Leptokurtic) யுடையதெனவும். $\beta_2 < 3$ எனின் மிகைத் தட்டை (Platykurtic) யுடையதெனவும் கூறப்படும்.

மாதிரி 8 :

பின் வரும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி பற்றிய முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் காண்க. மேலும் β_1, β_2 இவற்றைக் கணக்கிடுக. இப் பரவல் குறைத் தட்டையுடையதா அல்லது மிகைத் தட்டையுதா எனக் கூறுக.

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f :	1	6	13	25	30	22	9	5	2

x	f	d $x_i - 5$	$f\,d$	$f\,d^2$	$f\,d^3$	$f\,.\,d^4$	$c\,f$
1	1	−4	−4	16	−64	256	1
2	6	−3	−18	54	−162	486	7
3	13	−2	−26	52	−104	208	20
4	25	−1	−25	25	−25	25	45
5	30	0	0	0	0	0	75
6	22	1	22	22	22	22	97
7	9	2	18	36	72	144	106
8	5	3	15	45	135	405	111
9	2	4	8	32	128	512	113
மொத்தம்			−10	282	+2	2058	

$$\mu_1' = \frac{1}{N} \Sigma f_i\, d_i = -\frac{10}{113} = -\cdot 09$$

$$\mu_2' = \frac{1}{N} \Sigma f_i\, d_i^2 = \frac{282}{113} = 2\cdot 496$$

$$\mu_3' = \frac{1}{N} \Sigma f_i\, d_i^3 = \frac{2}{113} = 0\cdot 018$$

$$\mu_4' = \frac{1}{N} \Sigma f_i\, d_i^4 = \frac{2058}{113} = 17\cdot 33$$

$$\mu_1 = \mu_1' - \mu_1' = 0$$

$$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 2\cdot 496 - \cdot 0081 = 2\cdot 49$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\,\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$= 0\cdot 018 - 3\,(-\cdot 09)\,(2\cdot 496) + (-\cdot 09)^3$$

$$= 0\cdot 7$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$$
$$= 17{\cdot}33 - 4({\cdot}018)(-{\cdot}09) + 6(2{\cdot}496)(-{\cdot}09)^2$$
$$-3(-{\cdot}09)^4 = 18{\cdot}33$$

மேலும், $\beta_1 = \dfrac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \dfrac{(0.7)^2}{(2.49)^3}$

$= .03$ (தோராயமாக)

$\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} = \dfrac{18{\cdot}33}{(2.49)^2}$

$= 3$ (தோராயமாக)

மாதிரி 9 :

கீழே தரப்பட்டுள்ளவற்றுக்குப் பியர்ஸன் கோட்டக் கெழுவையும், கால் மான கோட்டக் கெழுவையும் காண்க.

x:	3 – 6	6 – 9	9 – 12	12 – 15	15 – 18
f:	4	10	15	8	5

x_i	மைய மதிப்பு	f_i	d_i $\left(\dfrac{x_i - 10.5}{3}\right)$	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$	$f_i d_i^3$	$f_i d_i^4$	$c \cdot f$
3 – 6	4·5	4	–2	–8	16	–32	64	4
6 – 9	7·5	10	–1	–10	10	–10	10	14 ← $\frac{N}{4}$
9 – 12	10·5	15	0	0	0	0	0	29 ← $\frac{N}{2}$
12 – 15	13·5	8	1	8	8	8	8	37 ← $\frac{3N}{4}$
15 – 18	16·5	5	2	10	20	40	80	42
	மொத்தம்	42	0	0	44	6	162	

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} \times C$$
$$= 10.5 + 0 = 10.5$$

$$\frac{N}{4} = 10.5, \quad \frac{N}{2} = 21, \quad \frac{3N}{4} = 31.5$$

$$Q_1 = l + \frac{\frac{N}{4} - m}{f} \times C$$

$$= 6 + \frac{10.5 - 4}{10} \times 3$$

$$= 6 + \frac{19.5}{10} = 7.95$$

$$Q_2 = M = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times C$$

$$= 9 + \frac{21 - 14}{15} \times 3$$

$$= 9 + \frac{21}{15}$$

$$= 9 + 1{\cdot}4 = 10{\cdot}4$$

$$Q_3 = l + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f} \times C$$

$$= 12 + \frac{31{\cdot}5 - 29}{8} \times 3$$

$$= 12 + \frac{7{\cdot}5}{8}$$

$$= 12 + {\cdot}94 = 12{\cdot}94$$

$$\mu_2' = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - A)^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i d_i^2 = \frac{44}{42} \times 3^2$$

$$= \frac{132}{14} = 9{\cdot}43$$

இங்கு $A = \bar{x} = 10{\cdot}5$. $\therefore \mu_2' = \mu_2$

எனவே, $\mu_2 = \sigma^2 = 9{\cdot}43$

கால் மானக் கோட்டக் கெழு

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{12.94 + 7.15 - 2(10.4)}{12.94 - 7.15}$$

$$= 0{\cdot}02$$

எனவே, பியர்ஸன் கோட்டக் கெழு

$$= \frac{3(\bar{x} - M)}{\sigma} = \frac{3[10{\cdot}5 - 10{\cdot}4]}{\sqrt{9{\cdot}43}}$$

$$= 0{\cdot}098$$

பயிற்சி 16·2

1. ஓர் அலைவுப் பரவலில் 4 ஐப் பற்றிய முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே $-1{\cdot}5$, 17, -30, 108 எனின், β_1, β_2 ஆகியவற்றைக் கணக்கிட்டு இப்பரவல் குறைத்தட்டையுடையதா அல்லது மிகைத்தட்டையுடையதா எனக் காண்க.

2. $x = 4$ என்பதோடு இணைந்த முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் முறையே 1, 4, 10, 45 எனின், கூட்டுச் சராசரி 5, மாறுவிகிதம் 3, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 26$ என நிறுவுக.

3. கீழ் வருவனவற்றுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, முகடு, தரவிலக்கம், ஒரு கோட்டளவை காண்க.

ஆண்டுகள்	எண்ணிக்கை
10-க்குக் கீழ்	15
20-க்குக் கீழ்	32
30-க்குக் கீழ்	51
40-க்குக் கீழ்	78
50-க்குக் கீழ்	97
60-க்குக் கீழ்	109.

4. கீழ்க்கண்ட பரவலின் அலைவுவரை வரைக. இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காண்க.

x : −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3.

y : 1, 10, 18, 12, 7, 2, 0.

5, கூட்டுச் சராசரி 26, இடைநிலை 24 எனின், அலைப்பரவல் குறைத்தட்டையுடையதா, மிகைத் தட்டையுடையதா எனக் காண்க.

6. A, B என்ற இரு புள்ளி விவரங்களுக்குப் பரவுகை, கோட்டம் ஆகியவற்றை ஒப்பிட்டு நோக்குக.

	A	B
இடைநிலை	19·64	24·46
முதல் கால்மானம் Q_1	13·46	15·64
மூன்றும் கால்மானம் Q_3	25·94	37·76.

7. கீழ்வரும் மதிப்பெண்களது பரவலுக்குப் பியர்ஸன் கோட்டக்கெழு காண்க.

மதிப்பெண்கள்		மாணவர்கள்
0-க்கு மேல்		150
10	,,	140
20	,,	100
30	,,	80
40	,,	80
50	,,	70
60	,,	30
70	,,	14
80	,,	0

17. வளைகோடு பொருத்தல்

(Curve Fitting)

17-1. ஒரு பல்கலைக் கழக மாணவர்களது உயரங்களையும், எடைகளையும் முறையே x_i, y_i எனக் குறிப்பிடுவோம். மாணவர்களது உயரத்துக்கும் எடைக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண, பல்கலைக் கழக மாணவர்கள் எனும் முழுமைத் தொகுதி (population) யிலிருந்து n மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியைத் (sample) தேர்ந்தெடுத்து. அவர்களின் உயரம், எடை முதலியவற்றைக் காண்போம். n மாணவர்களது உயரங்கள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனவும், எடைகள் $y_1, y_2, \ldots, y_n$ எனவும் கொள்வோம். பின் (x_1, y_1), (x_2, y_2), … (x_n, y_n) புள்ளிகளை ஒரு வரைதாளில் குறிக்கப் பெறும் புள்ளிகளின் தொகுதி 'சிதறல் விளக்கப் படம்' (Scatter diagram) எனப்படும்.

சிதறல் விளக்கப் படத்தில் ஒரு வளைகோடு பொருத்தலாம். அவ்வாறு பொருத்தப்பட்ட வளைகோடு ஒரு நேர்கோடெனின், x, y மாறிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு ஒரு நேர்கோட்டுக்குரிய (Linear) தொடர்பு எனப்படும். அதாவது மிகப் பெரும்பாலான புள்ளிகள் வழி ஒரு நேர்கோடு செல்லுவதாய் அமையுமெனின், மாணவர்களது உயரத்துக்கும் எடைக்கும் ஒரு நேர்கோட்டுக்குரிய தொடர்பு உள்ளது என்கிறோம். இதுபோன்று மாதிரிகளின் மூலம் முழுமைத் தொகுதியின் தன்மையை அறிய வளைகோடு பொருத்தல் பெரிதும் உதவுகிறது.

பொருத்தப்படும் வளைகோடு நேர்கோடு அல்ல எனின், நீட்டலற்ற ஒரு தொடர்பு (non-linear relation) மாறிகளுக்கிடையே உள்ளதெனப் பொருள். கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு இவ்வாறு தோராயமாகப் பொருந்தும் வளைவுகளுக்கு சமன்பாடுகள் காண்பது 'வளைகோடு பொருத்தல்' (Curve fitting) எனப்படும்.

17-2. குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை (Principle of least squares)

$y = f(x)$ என்பது தோராயமாகப் பொருத்தப்படும் வளை கோட்டின் சமன்பாடு என்க. y_i-ன் நேரில் கண்ட மதிப்புக்கும், வளைகோட்டின் வாயிலாகக் காணும் மதிப்புக்கும் உள்ள வேறுபாடு d_i எனின்,

$$d_i = y_i - f(x_i)$$

$$\therefore \quad d_i^2 = \{ y_i - f(x_i) \}^2.$$

விலக்க வர்க்கங்களின் கூடுதல் Σd_i^2 மிக மிகச் சிறியதெனின் $y = f(x)$ எனும் வளைகோடு ஏறத்தாழ ஏற்றதொரு பொருத்த மாக அமையும் என்பது தெளிவாகிறது. இக் கொள்கை "குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை" எனப்படும்.

17-3. நேர்கோட்டினைப் பொருத்தல்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு மாதிரியின் n சோடி மதிப்புகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ எனக் கொள்வோம்.

இப்புள்ளிகளில் பொருத்தப்பெறும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c$ என்க. y-ன் நேரில் கண்ட மதிப்பு y_i, சமன்பாட்டின் மூலம் கிடைக்கப்பெறும் மதிப்பு $(m x_i + c)$ எனின்,

$$\text{வேறுபாடு } d_i = y_i - (m x_i + c)$$

எனவே, விலக்கங்களின் வர்க்கங்களது கூடுதல்

$$\Sigma d_i^2 = [y_i - (m x_i + c)]^2.$$

$$= F(m, c).$$

மிகச் சிறந்த பொருத்தத்திற்கு $F(m, c)$ மிகமிகச் சிறியதாய் இருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

$$\therefore \quad 2 \Sigma [y_i - (mx_i + c)] x_i = 0$$

$$2 \Sigma [y_i - (mx_i + c)] = 0$$

அதாவது $\Sigma x_i y_i - \Sigma m x_i^2 - \Sigma c x_i = 0$

$$\Sigma y_i - \Sigma m x_i - \Sigma c = 0$$

$$\therefore \quad \Sigma x_i y_i - m \Sigma x_i^2 - c \Sigma x_i = 0$$

$$\Sigma y_i - m \Sigma x_i - xc = 0.$$

எனவே, நமக்குக் கிடைக்கும் இயல் சமன்பாடுகளில் (Normal equations) இருந்து m, c ஐக் கணக்கிடலாம்.

இயல் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$m \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$m \Sigma x + nc = \Sigma y \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

மாதிரி 1 :

குறைந்தவர்க்கக் கொள்கையைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரத்திற்கு ஒரு கோட்டைப் பொருத்துக.

x :	0	1	2	3	4	5	6
y :	0·4	0·7	1·1	1·6	1·9	2·3	2·6.

x	y	x^2	xy
0	0·4	0	0
1	0 7	1	0·7
2	1·1	4	2·2
3	1·6	9	4·8
4	1·9	16	7·6
5	2·3	25	11·5
6	2·6	36	15·6
21	10·6	91	42·4

இயல் சமன்பாடுகள்

$$m \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$m \Sigma x + nc = \Sigma y \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \quad 91\,m + 21c = 42{\cdot}4$$

$$21\,m + 7\,c = 10{\cdot}6$$

இவற்றை விடுவிப்பின்,

$$m = {\cdot}38, \quad c = {\cdot}37$$

எனவே, பொருத்தப்பட்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = 0{\cdot}38x + 0{\cdot}37$$

17-4. பரவளைவினைப் பொருத்தல்

கொடுத்துள்ள ஒரு மாதிரியின் n சோடி மதிப்புகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) ..., (x_n, y_n) எனக் கொள்வோம்.

பொருத்தப்படும் பரவளைவின் சமன்பாடு $y = ax^2 + bx + c$ எனக் கொள்க.

நேரில் கண்ட y-ன் மதிப்பு y_i, சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் மதிப்பு $ax_i^2 + bx_i + c$ எனின். விலக்கம்

$$d_i = [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]$$

$$\therefore \quad \Sigma_i\, d_i^2 = \Sigma_i\, [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2.$$

$$= F(a, b, c)$$

சிறந்த பொருத்தத்திற்கு $F(a, b, c)$-ன் மதிப்பு மிகமிகச் சிறியதாக இருக்கவேண்டும்,

$$\therefore \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

எனவே,

$$2\,\Sigma_i\, [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i^2 = 0$$

$$2\,\Sigma_i\, [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]\, x_i = 0$$

$$2\,\Sigma_i\, [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] = 0$$

அதாவது,

$$\Sigma_i\, x_i^2\, y_i - a\,\Sigma_i\, x_i^4 - b\,\Sigma_i\, x_i^3 - c\,\Sigma_i\, x_i^2 = 0$$

$$\Sigma_i\, x_i\, y_i - a\,\Sigma_i\, x_i^2 - b\,\Sigma_i\, x_i^2 - c\,\Sigma_i\, x_i = 0$$

$$\Sigma_i\, y_i - a\,\Sigma_i\, x_i^2 - b\,\Sigma_i\, x_i - xc = 0.$$

எனவே, இயல் சமன்பாடுகள்

$$a \Sigma x^4 + b \Sigma x^3 + c \Sigma x^2 = \Sigma x^2 y \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$a \Sigma x^3 + b \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$a \Sigma x^2 + b \Sigma x + xc = \Sigma y \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து a, b, c என்பவை கணக்கிடப் பெறும்.

மாதிரி 2 :

கீழ்க்காணும் விவரத்திற்கு ஒரு பரவளைவினைப் பொருத்துக.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	2	6	7	8	10	11	11	10	9

x	y	xy	x^2	$x^2 y$	x^3	x^4
1	2	2	1	2	1	1
2	6	12	4	24	8	16
3	7	21	9	63	27	81
4	8	32	16	128	64	256
5	10	50	25	250	125	625
6	11	66	36	396	216	1296
7	11	77	49	539	343	2401
8	10	80	64	640	512	4096
9	9	81	81	729	729	6561
45	74	421	285	2771	1925	15333

எனவே, இயல் சமன்பாடுகள்

$$15333a + 1925b + 285c = 2771 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$1925a + 285b + 45c = 421 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$285a + 45b + 9c = 74 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காணின்,

$$a = -0.27, \quad b = 3.55, \quad c = -1$$

எனவே, பரவளையின் சமன்பாடு,

$$y = ax^2 + bx + c$$

அதாவது, $y = -0.27x^2 + 3.55x - 1$.

17-5. $y = ab^x$ என்ற வளைகோடு பொருத்தல்

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, \ldots, (x_n, y_n)$ என்ற n சோடி மதிப்புகளில் பொருந்தும் வளைவு $y = ab^x$ எனக் கொள்வோம்.

இரு புறமும் லாக் (log) எடுக்க,

$$\log_{10} y = \log_{10} a + x \log_{10} b \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$Y = \log_{10} y$, $A = \log_{10} a$, $B = \log_{10} b$ எனின்

சமன்பாடு (1), $Y = A + Bx \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

என்றுகும். அதாவது $y = ab^x$ எனும் சமன்பாடு ஒரு நேர்கோட்டு வடிவத்தில் ஒடுக்கப்பட்டுள்ளது.

A, B என்ற மாறிலிகள் குறைந்த வர்க்கக் கொள்கையின் மூலம் தீர்மானிக்கப்பெறும். இதன் இயல் சமன்பாடுகள் வருமாறு:

$$A \Sigma x + B \Sigma x^2 = \Sigma xY \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$nA + B \Sigma x = \Sigma Y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

புள்ளிகள் ஒரு பக்க லாகிருதத்தாளில் (semi-logarithmic paper) குறிக்கப்பெறின், ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கப்பெறும்.

மாதிரி 3 :

பின்வரும் விவரத்துக்கு $y = ae^{bx}$ வடிவில் ஒரு வளைகோடு பொருத்துக.

x : 5 6 7 8 9 10

y : 133 55 23 7 2 2

$$y = ae^{bx}$$

$$\therefore \quad \log_{10}y, = \log_{10}a + bx \log_{10}e$$

$Y = \log_{10}y$, $A = \log_{10}a$, $B = b \log_{10}e$ எனின்

$Y = A + Bx$ என்றாகும்.

எனவே இயல் சமன்பாடுகள்

$$A \Sigma x + B \Sigma x^2 = \Sigma x Y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$nA + B \Sigma x = \Sigma Y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இப் புள்ளிகள் ஓர் இருபக்க லாகிருத வரைத்தாளில் குறிக்கப் பெறின், ஒரு நேர்கோடு கிடைக்கும்.

x	y	$Y = \log_{10}y$	x^2	xY
5	133	2·1239	25	10·6195
6	55	1·7404	36	10·4424
7	23	1·3617	49	9·5319
8	7	0·8451	64	6·7608
9	2	0·3010	81	2·7090
10	2	0·3010	100	3·0100
45	222	6·6731	355	43·0736

எனவே, இயல் சமன்பாடுகள்

$$45A + 355\,B = 43·0736 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$6A + 45\,B = 6·6731 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் விடுவிப்பின்

$$A = 4\cdot1009$$

$$B = -0\cdot3985$$

$\therefore$ a = எதிர் மடக்கை $4\cdot1009$

$= 12620$

$$b = \frac{B}{\log_{10}e} = \frac{-0\cdot3985}{0\cdot4343} = -0\cdot92$$

எனவே, வளைவின் சமன்பாடு

$$y = ae^{-bx}$$

அதாவது $y = 12620e^{-0\cdot92x}$

பயிற்சி 17

1. பின்வரும் விவரங்களுக்குப் பொருந்தும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 0\cdot72 + 1\cdot33x$ என நிறுவுக.

x :	0	1	2	3	4
y :	1	1·8	3·3	4·5	6·3

2. கீழ்கண்ட பட்டியலுக்கு ஒரு நேர்கோட்டினைப் பொருத்துக

ஆண்டு	வேலையற்றோர் சதவீதம்
1945	2·1
1946	2·2
1947	3·0
1948	5·1
1949	6·4
1950	6·7
1951	7·2
1952	7·9

1959-ல் வேலையற்றோரின் சதவீதம் காண்க.

3. கீழ்காணும் விவரத்துக்கு ஓர் இருபடி பரவளைவைப் பொருத்துக.

x :	0	1	2	3	4
y :	1	1·8	1·3	2·5	6·3

4. கீழ்க்கண்ட ஒரு விலைப்பட்டியலுக்கேற்ற இருபடி ஓர் பரவளைவினைப் பொருத்துக.

ஆண்டு	1875	1876	1877	1878	1879	1880
விலை	88	87	81	78	74	79
ஆண்டு	1881	1882	1883	1884	1885	
விலை	85	84	90	92	100	

5. பின் வரும் அட்டவணைக்குப் பொருத்தப்படும் இருபடி பரவளைவின் சமன்பாடு $y = 34.8+5.8x + 0.43x^2$ என நிறுவுக.

ஆண்டு x	1945	1946	1947	1948	1949	1950
மதிப்பு y	17	20	19	26	24	40
x	1951	1952	1953	1954	1955	
y	35	55	51	74	69	

6. கீழ்க்கண்ட பட்டியல் அமெரிக்க நாட்டின் பெட்ரோலியம் உற்பத்தியைக் காட்டுகிறது. $\log y = a + bx$ என்ற வளைவினைப் பொருத்துக.

ஆண்டு	பெட்ரோலியம் (மில்லியன்பவுண்டு)	ஆண்டு	பெட்ரோலியம்
1922	557.5	1926	770.9
1923	732.4	1927	401.1
1924	713.9	1928	901.6
1925	763.7	1929	1007·3

7. $y = ax^b$ வடிவில் n சோடி மதிப்புகளுக்குப் பொருத்தப்பட வேண்டிய வளைவுக்கு இயல் சமன்பாடுகள் காண்க.

8. $y = ae^{bx}$ வடிவில் பின்வரும் பட்டியலுக்கு ஒரு வளைவு வரைக.

x:	0	5	8	12	20
y:	3.0	1.5	1.0	0·55	0.18

9. $v = aT^b$ என்ற வடிவில் பின் வரும் விவரத்துக்கு ஒரு வளைகோடு பொருத்தவும்.

v:	350	400	500	600
T:	61	26	7	2·6

10. கொடுக்கப்பட்டுள்ள 50 சோடி மதிப்புகளுக்கு $b = yx^a$ என்ற வடிவில் ஒரு வளைவு எவ்வாறு பொருத்துவாய் என்பதை விளக்குக.

18. ஒட்டுறவு

(Correlation)

18-1. x, y என்ற மாறிகளது அனைத்து மதிப்புகளும் ஒரு சமன்பாட்டில் துல்லியமாகப் பொருந்தினால், அவ்விரு மாறிகளும் நிறைவுடைய ஒட்டுறவு (Perfect Correlation) கொண்டுள்ளது என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு வட்டத்தினது பரிதி C-க்கும் ஆரை r-க்கும் இடையே நிறைவுடைய ஒட்டுறவு இருக்கிறது. ஏனெனின், $C = 2\pi r$ என்ற சமன்பாட்டில் அவ்விரு மாறிகளும் துல்லியமாகப் பொருந்துகிறது. இவ்வாறே ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு A, அதன் ஆரை r இவற்றுக்கிடையேயுள்ள ஒட்டுறவு நிறைவுடையதாகும் ($A = \pi r^2$).

மனிதர்களுடைய உயரம், எடை, வருமானம், செலவு இவற்றுக்கிடையே ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு ஒட்டுறவு இருப்பதை நாம் அறியலாம்,

18-2. நேர்கோட்டுக்குரிய ஒட்டுறவு (Linear Correlation)

(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) என்ற n சோடி மதிப்புகளை ஒரு வரைதாளில் குறிக்கப்பட்டால் கிடைக்கப் பெறுவது சிதறல் விளக்கப்படமாகும் (Scatter diagram). அனைத்துப் புள்ளிகளும் ஒரு நேர்கோட்டைச் சுற்றிச் சூழ்ன்று அமைந்து கிடப்பின் x, y-க்குள்ள உறவு நேர்கோட்டுக்குரிய ஒட்டுறவாகும். அப் புள்ளிகள் தாள் முழுவதும் விரிந்து பரந்து கிடந்தால், அது அம் மாறிகளிடையே எந்த உறவும் இல்லை என்பதைப் புலப் படுத்தும்.

18-3. ஒட்டுறவு அளவைகள்

$\frac{1}{N} \Sigma (x - \bar{x})^2$ என்பது கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$-லிருந்து x மாறியின் விலகல்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாகும். இவ்வாறே,

$\frac{1}{N}\Sigma(y-\bar{y})^2$ என்பது கூட்டுச் சராசரி $\bar{y}$-லிருந்து y மாறியின் விலக்கங்களது வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை. இவை இரண்டும் $\bar{x}$, $\bar{y}$-லிருந்து x, y மாறிகளின் விலகல்களை அளக்கும். எனவே, x, y மாறிகளின் இணை விலகல்களை (Covariation) அளக்க $\frac{1}{N}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ என்பதைப் பயன்படுத்தலாம். x, y என்ற இரு மாறிகளும் வெவ்வேறு அலகுகளில் இருக்கலாமாதலின், ஒட்டுறவை அளக்க

$$\frac{1}{N}\,\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma x\,\sigma y}$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

அதாவது $M = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N\sigma x\,\sigma y}$

இதற்குப் பியர்ஸான் பெருக்குச் சுழல் ஒட்டுறவுக் கெழு (Pearson's product - Moment Coefficient of Correlation) எனப் பெயராகும்.

18-4. ஒட்டுறவுக்குச் சுருக்கச் சூத்திரம்

$$(x_1\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n)$$

என்பவை n சோடி மதிப்புகள் எனக்கொள்வோம். பின் ஒட்டுறவுக் கெழு r பின்வருவனவற்றிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{N\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$\begin{aligned}(x_i-A)(y_i-B) &= (x_i-\bar{x}+\bar{x}-A)(y_i-\bar{y}+\bar{y}-B)\\ &= (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})+(x_i-\bar{x})(\bar{y}-B)\\ &\quad +(\bar{y}-A)(y_i-\bar{y})+(\bar{x}-A)(\bar{y}-B).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-A)(y_i-B) &= \Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})+\Sigma(x_i-\bar{x})(\bar{y}-B)\\ &\quad +\Sigma(\bar{x}-A)(y_i-\bar{y})+\Sigma(\bar{x}-A)(\bar{y}-B)\end{aligned}$$

$$= \Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (\bar{y} - B)\Sigma (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - A)\Sigma (y_i - \bar{y}) + N(\bar{x} - A)(\bar{y} - B)$$

$$= \Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + N(\bar{x} - A)(\bar{y} - B)$$

$$\because \quad \Sigma (x_i - \bar{x}) = 0$$
$$\Sigma (y_i - \bar{y}) = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{N}\Sigma (x_i - A)(y_i - B) = \frac{1}{N}\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (\bar{x} - A)(\bar{y} - B).$$

எனவே, $\frac{1}{N}\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$= \frac{1}{N}\Sigma (x_i - A)(y_i - B) - (\bar{x} - A)(\bar{y} - B)$$

அதாவது $\frac{1}{N}\Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{N}\Sigma d_x d_y - \frac{1}{N}\Sigma d_x \frac{1}{N}\Sigma d_y$

$$\left(\because \quad \bar{x} = A + \frac{\Sigma d_x}{N}, \ \bar{y} = B + \frac{\Sigma d_y}{N}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{N}\frac{\Sigma (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\left(\frac{1}{N}\Sigma dx\, d_y\right) - \left(\frac{1}{N}\Sigma d_x\right)\left(\frac{1}{N}\Sigma d_y\right)}{\sigma_x \sigma_y}$$

எனவே ஒட்டுறவுக் கெழு,

$$M = \frac{\left(\frac{1}{N}\Sigma d_x d_y\right) - \left(\frac{1}{N}\Sigma d_x\right)\left(\frac{1}{N}\Sigma d_y\right)}{\sigma_x \sigma_y}$$

மாதிரி 1 :

கீழ்க்காணும் விவரங்கள் 11 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண் களாகும். இதன் ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

x :	தாள் 1.	44	55	56	58	60	65
		68	70	75	80	85	
y :	தாள் 2.	58	50	48	60	62	64
		65	70	74	82	90	

x	y	d_x	d_y	$d_x d_y$	d_x^2	d_y^2
45	56	− 20	− 8	160	400	64
55	50	− 10	− 14	140	100	196
56	48	− 9	− 16	144	81	256
58	60	− 7	− 4	28	49	16
60	62	− 5	− 2	10	25	4
65	64	0	0	0	0	0
68	65	3	1	3	9	1
70	70	5	6	30	25	36
27	74	10	10	100	100	100
80	82	15	12	270	225	324
85	90	20	26	520	400	676
		− 51 + 53 + 2	− 44 + 61 + 17	1405	1414	1673

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma\, d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma\, d_x}{N}\right)^2$$

$$= \frac{1414}{11} - \frac{4}{121} = \frac{15550}{121}$$

$$\therefore \quad \sigma_x = \frac{124 \cdot 7}{11}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma\, d_y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma\, d_y}{N}\right)^2$$

$$= \frac{1673}{11} - \frac{289}{121} = \frac{18114}{121}$$

$$\therefore \quad \sigma_y = \frac{134 \cdot 6}{11}$$

$$r = \frac{\left(\frac{1}{N}\Sigma d_x d_y\right) - \left(\frac{1}{N}\Sigma d_x\right)\left(\frac{1}{N}\Sigma d_y\right)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{1405}{11} - \frac{2}{11} \cdot \frac{17}{11}}{\sqrt{\frac{15550}{121}}\sqrt{\frac{18114}{121}}}$$

$$= \frac{15455 - 34}{\sqrt{(15550)(18114)}} = \frac{15421}{16780}$$

$$= \cdot 9189$$

எனவே, ஒட்டுறவுக் கெழு $r = \cdot 9189$

மாதிரி 2 :

பின் வரும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y :	9	8	10	12	11	13	14	16	15.

x	y	d_x	d_y	$d_x d_y$	d_x^2	d_y^2
1	9	−4	−2	8	16	4
2	8	−3	−3	9	9	9
3	10	−2	−1	2	4	1
4	12	−1	1	−1	1	1
5	11	0	0	0	0	0
6	13	1	2	2	1	4
7	14	2	3	6	4	9
8	16	3	5	15	9	25
9	15	4	4	16	16	16
		0	−6 +15 9	57	60	69

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma d_x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_x}{N}\right)^2 = \frac{60}{9} - 0 = \frac{60}{9}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma d_y^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d_y}{N}\right)^2 = \frac{69}{9} - \left(\frac{9}{9}\right)^2$$

$$= \frac{69}{9} - 1 = \frac{60}{9}$$

ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r = \frac{\left(\frac{1}{N}\Sigma d_x d_y\right) - \left(\frac{1}{N}\Sigma d_x\right)\left(\frac{1}{N}\Sigma d_y\right)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{57}{9} - 0\left(\frac{9}{9}\right)}{\sqrt{\frac{60}{9}}\sqrt{\frac{60}{9}}}$$

$$= \frac{57}{9} \div \frac{60}{9} = \frac{57}{60}$$

$$= \cdot 95$$

எனவே ஒட்டுறவுக் கெழு $r = 0 \cdot 95$

18-5. ஒட்டுறவுக் கோடுகள் (Regression lines)

சிதறல் விளக்கப்படத்தில் புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டைச் சுற்றிச் சுழன்று அமைந்திருப்பின் அம்மாறிகளுக்கிடையே நேர் கோட்டுக்குரிய ஒட்டுறவு (Linear Correlation) உள்ளது எனக் கூறுகிறோம். இப் புள்ளிகளில் பொருத்தக்கூடிய கோட்டினை 'ஒட்டுறவுக்கோடு' என்கிறோம்.

x ஐத் தனி மாறியாகவும் y-யினைச் சார்ந்த மாறியாகவும் கொண்டு பொருத்தக்கூடிய மிகச் சிறந்த நேர் கோட்டினை x-ன் மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு என்கிறோம். இவ்வாறே y ஐத் தனி மாறியாகவும் x ஐச் சார்ந்த மாறியாகவும் கொண்டு பொருத்தப்படும் கோடு y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு எனப்படும்.

18-6. ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$y = mx + c$ பொருத்தப்படக்கூடிய மிகச் சிறந்த கோடெனின், இயல் சமன்பாடுகள்

$$m \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$m \Sigma x + nc = \Sigma y \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{m \Sigma x + nc}{n} = \frac{\Sigma y}{n}$$

$$\therefore \quad m\bar{x} + c = \bar{y}$$

எனவே ஒட்டுவுறவுக்கோடு $y = mx + c$, $(\bar{x}, \bar{y})$ புள்ளி வழிச் செல்லும். ஆதியை $(\bar{x}, \bar{y})$ புள்ளிக்கு மாற்ற $c = 0$ என்றாகும்.

மேலும், $y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$

$$\therefore \quad Y = mX, \qquad X = x - \bar{x}$$

$$Y = y - \bar{y}$$

மேலும் சமன்பாடு (1),

$m \Sigma X^2 = \Sigma XY$ என்றாகும்

$$\therefore \quad m = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2}$$

$$= \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\Sigma (x - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{N} \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\frac{1}{N} \Sigma (x - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{P}{\sigma_x^2} \cdot \quad P = \frac{1}{N} \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}).$$

எனவே, x-ன் மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு (Regression line of y on x)

$$Y = \frac{P}{\sigma_x^2} X$$

அதாவது,

$$y - \bar{y} = \frac{P}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$$

$$= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \quad \because \; P = \frac{1}{N}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$$
$$= r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

அதாவது, x-ன் மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}).$$

இவ்வாறே y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு

$$x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$

மாதிரி 3 :

மாதிரி 2-ல் உள்ள விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$r = \cdot 95, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{60}{9}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{60}{9}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d_x}{N} = 5 + 0 = 5.$$

$$\bar{y} = B + \frac{\Sigma d_y}{N} = 11 + \frac{9}{9} = 12.$$

எனவே, x-ன் மேல் y-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}(x - \bar{x})$$

$$y - 12 = 0{\cdot}95\,(x - 5) \quad \because \; \sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\frac{60}{9}}$$

அதாவது $y - 12 = 0{\cdot}95\,(x - 5)$

y-ன் மேல் x-ன் ஒட்டுறவுக் கோடு

$$x - \bar{x} = \frac{r\,\sigma y}{\sigma x}(y - \bar{y}$$

$$x - 5 = 0{\cdot}95\,(y - 12)$$

அதாவது $x - 5 = 0{\cdot}95\,(y - 12)$

18-7. தர ஒட்டுறவு (Rank Correlation)

n நபர்களின் தர மதிப்புகள் நீதிபதி A-ன் படி $x_1, x_2, \dots x_n$ எனவும், அதே n நபர்களின் தர மதிப்புகள் நீதிபதி B-ன் படி $y_1, y_2, \dots, y_n$ எனவும் கொள்வோம்.

$x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_n$ என்பவை ஏதோ ஒரு வரிசையிலுள்ள $1, 2, 3, \dots, n$ என்ற n மதிப்புகளாகும்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + \dots + n)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n+1}{2}.$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} - \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{n+1}{12}(4n + 2 - 3n - 3)$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

இவ்வாறே $\sigma_y^2 = \frac{n^2-1}{12}$

$z = (x - y)$ என்க. ... ... (1)

$$\therefore \quad \frac{\Sigma z}{n} = \frac{\Sigma x}{n} - \frac{\Sigma y}{n}$$

$$\therefore \quad \bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\therefore \quad z - \bar{z} = (x - \bar{x}) - (y - \bar{y}) \quad \because \{(1) - (2)\}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n}\Sigma(z - \bar{z})^2 = \frac{1}{n}\Sigma[(x-\bar{x}) - (y-\bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{n}[\Sigma(x-\bar{x})^2 + \Sigma(y-\bar{y})^2 - 2\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})]$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{2}{n}\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}).$$

$$= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$$

அதாவது $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$

$$\therefore \quad r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

இங்கு $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = 0$

$$\therefore \quad \sigma^2_z = \frac{1}{n}\Sigma(z - \bar{z})^2$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma(x-y)^2$$

மேலும், $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{n^2-1}{12}$

$$\therefore \quad r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_z^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{n^2-1}{12} + \frac{n^2-1}{12} - \frac{1}{n}\Sigma(x-y)^2}{2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}$$

$$= \frac{\frac{2(n^2-1)}{12} - \frac{1}{n}(x-y)^2}{\frac{2(n^2-1)}{12}}$$

$$= 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \Sigma (x-y)^2$$

$$= 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2-1)}, \quad d = (x-y)$$

தர ஒட்டுறவு ρ எனக் குறிப்பிடப் பெறும்.

$$\therefore \quad \rho = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2-1)}.$$

மாதிரி 4 :

10 மாணவர்களது தர மதிப்புகள் இரு பாடங்களில் பின்வருமாறு உள்ளதெனின், தர ஒட்டுறவைக் காண்க.

A : 3 5 8 4 7 10 2 1 6 9

B : 6 4 9 8 1 2 3 10 5 7

x	y	$d = (x-y)$	$d^2 = (x-y)^2$
3	6	− 3	9
5	4	+ 1	1
8	9	− 1	1
4	8	− 4	16
7	1	6	36
10	2	8	64
2	3	− 1	1
1	10	− 9	81
6	5	1	1
9	7	2	4
மொத்தம்			214

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 214}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= 1 - \frac{394}{990}$$

$= -0 \cdot 3$ (தோராயமாக).

எனவே தர ஒட்டுறவு $\rho = -0 \cdot 3$.

மாதிரி 5 :

ஓர் அழகுப் போட்டியில் 8 நங்கைகளுக்கு *A*, *B* என்ற இரு நீதிபதிகள் அளித்த மதிப்பெண்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. இரு நீதிபதிகளில் பொதுவான அழகுக் கண்ணோட்டமுடையவர் எவர் என்பதை ஆராய்க.

A : 40, 60, 85, 89, 70, 68, 54, 73

B : 50, 74, 92, 80, 61, 80, 63, 64

A	*B*	*A*-ன் தர மதிப்பு (x)	*B*-ன் தர மதிப்பு (y)	$(x-y)$	$(x-y)^2$
40	50	8	8	0	0
60	74	6	4	2	4
85	92	2	1	1	1
89	80	1	2·5	− 1·5	2·25
70	61	4	7	− 3	9
68	80	5	2·4	− 2·5	6·25
54	63	7	6	1	1
73	64	3	5	− 2	4
				மொத்தம்	27·50

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 27 \cdot 50}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{165 \cdot 00}{504}$$

$$= \frac{504 - 165}{504}$$

$$= \frac{339}{504} = 0 \cdot 67$$

எனவே, தர ஒட்டுறவு $\rho = 0 \cdot 67$

பயிற்சி 18.

(1) கீழ்க்காணும் தந்தை மகன்களின் உயரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

தந்தை உயரம் :	65	66	67	68	69	70	71
தனயன் உயரம் :	66	67	68	72	72	71	69

(2) கீழ்க்காணும் வாழ்க்கைச் செலவு குறியீட்டெண்ணுக்கும், ஊதிய விகித குறியீட்டெண்ணுக்கும், ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

செலவு குறியீட்டு எண் (x)	151	110	102	101	105	100	96
ஊதிய விகித குறியீட்டு எண் (y)	155	120	99	98	101	101	100
செலவெண் x	95	95	87	84	81	100	
ஊதிய எண் y	99	99	95	96	94	102	

(3) x, y மதிப்புகளிடையே ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

x :	78	89	97	69	59	79	68	61
y :	125	137	156	112	107	136	123	108

(4) கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

இருப்பு	80	82	86	91	83
விலை	146	140	130	117	135
இருப்பு	85	89	96	93	92
விலை	127	115	95	100	103

(5) கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகளையும் காண்க.

x : 152, 114, 138, 158, 144, 153, 141; 117, 136, 150

y : 198, 300, 414, 594 676, 549, 320, 483, 487, 659

(6) ஓர் அழகுப் போட்டியில் பங்கேற்ற 10 அழகிகளுக்கு இரு நீதிபதிகள் அளித்த தர மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. தர ஒட்டுறவு 0·224 என நிறுவுக.

6	4	3	1	2	7	9	8	10	5
4	1	6	7	5	8	10	9	3	2

(7) பதினாறு மாணவர்கள் வெவ்வேறு பாடங்களில் பெற்ற தர மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அடைப்புகளிலுள்ள இரு எண்களும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாணவன் இரு பாடங்களில் பெற்ற தர மதிப்புகளாகும். இதன் தர ஒட்டுறவு காண்க.

(1, 1), (2, 10), (3, 3), (4, 4), (5, 5),
(6, 7), (7, 2), (8, 6), (9, 8), (10, 11),
(11, 15) (12, 9), (13, 14), (14, 12), (15, 16),
(16, 13)

(8) 60 நிகழ்ச்சிகளில் கிடைத்த இரு ஒட்டுறவுக் கோடுகள் $5x = 6y + 24$, $1000y = 768x - 3608$ எனின், ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

(9) கீழ்க்காணும் பட்டியல் கணவன், மனைவியின் வயதினைக் காட்டுகிறது. பியர்ஸான் ஒட்டுறவுக்கெழு காண்க.

x :	22,	24,	26,	27,	28,	29,	30,	31,	32,	34
y :	18,	20,	20,	24,	22,	27,	21,	29,	27,	27

(10) கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களுக்குரிய ஒட்டுறவுக் கோடுகளைக் காண்க.

$\bar{x} = 150$ பவுண்டு; $\sigma_x = 20$ பவுண்டு; $N = 1000$

$\bar{y} = 68$ அங்.; $\sigma_y = 2 \cdot 5$ அங்.; $\Sigma xy = 10{,}230{,}000.$

19. ஈருறுப்பு, இயல் நிலை, பாய்ஸான் பரவல்கள்

(Binomial, Normal and Poisson distribution)

19-1. ஒரு சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் வெற்றித் தகவு p, தோல்வித் தகவு $q = 1 - p$ எனின், n சோதனைகளில் ஒரு நிகழ்ச்சி r தடவைகள் நிகழ வெற்றித்தகவு

$P(r) = {}^nc_r\, p^r\, q^{n-r}$ ஆகும்,

எனவே, $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ் தகவுகள் முறையே

$$q^n, \quad {}^nc_1\, q^{n-1} p, \quad {}^nc_2\, q^{n-2} p^2, \quad \ldots, \quad p^n.$$

அதாவது வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ் தகவுகள் $(q+p)^n$ என்ற ஈருறுப்பு விரிவின் பல்வேறு உறுப்புகளாகும். எனவே, இஃது ஈருறுப்பு நிகழ் தகவு பரவல் (Binomial probalility distribution) எனப்படும்.

19-2. ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகள்

பூச்சியத்தை மூலப் புள்ளியாகக் கொண்டால்,

$$\mu_1' = \sum_{r=0}^{n} r \,.\, {}^nc_r\, p^r\, q^{n-r}$$

$$= 0.q^n + 1.{}^nc_1\, p\, q^{n-1} + 2\, p^2\, q^{n-2} + \ldots + n.p^n$$

$$= 1.{}^nc_1\, p\, q^{n-1} + 2\, {}^nc_2\, p^2\, q^{n-2} + \ldots + n.p^n$$

$$= np\left[q^{n-1} + \frac{2(n-1)}{1\cdot 2}pq^{n-2} + \frac{3(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}p^2q^{n-3} + \dots + p^{n-1}\right]$$

$$= np\left[q^{n-1} + {}^{n-1}c_1\, pq^{n-2} + {}^{n-1}c_2\, p^2q^{n-3} + \dots + p^{n-1}\right]$$

$$= np\,[q+p]^{n-1}$$

$$= np \qquad (\because \; q+p=1).$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_1' = np.} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\mu_2' = \sum_{r=0}^{n} r^2\cdot {}^nc_r\, p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} [r + r(r-1)]\,{}^nc_r\, p^r q^{n-r}$$

$$= \sum_{0}^{n} r\cdot{}^nc_r\, p^r q^{n-r} + \sum_{0}^{n} r(r-1)\,{}^nc_r\, p^r q^{n-r}$$

$$= np + [2\cdot{}^nc_2\, p^2q^{n-2} + 3\cdot 2\,{}^nc_3\, p^3q^{n-3} + \dots + n(n-1)p^n]$$

$$= np + n(n-1)p^2\left[q^{n-2} + \frac{n-2}{1}pq^{n-3} + \dots + p^{n-2}\right]$$

$$= np + n(n-1)p^2(q+p)^{n-2}$$

$$= np + n(n-1)p^2.$$

$$\therefore \quad \mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - (np)^2$$

$$= np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

$$= npq \qquad \because \; q = 1-p.$$

$$\therefore \quad \underline{\mu_2 = npq} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இவ்வாறே,

$$\mu'_3 = n(n+1)\, n-2)\, p^3 + 3n(n-1)\, q^2 + np.$$

$$\therefore\ \mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\,\mu_1' + 2\mu_1'^3$$

$$= n(n-1)(n-2)\,p^3 + 3n(n-1)\,p^2 + np$$
$$- 3\left[\ \{np + n(n-1)p^2\}\ \ \{np\}\ \right] + 2\,(np)^3$$

$$= np\,[(n-1)(n-2)\,p^2 + 3\,(n-1)\,p + 1$$
$$- 3np - 3n\,(n-1)\,p^2 + 2n^2p^2]$$

$$= np\,[(n^2 - 3n + 2)\,p^2 + 3np - 3p + 1$$
$$- 3np - 3x^2p^2 + 3np^2 + 2n^2p^2]$$

$$= np\,[2p^2 - 3p + 1]$$

$$= np\,(1-p)\,(1-2p)$$

$$= npq\,[p + q - 2p] = npq\,(q-p)$$

$$\therefore\ \mu_3 = npq\,(q-p) \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (3)$$

எனவே, ஈருறுப்புப் பரவலில்

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = np$ (இங்கு $\because\ \mu_1' = \bar{x}$)

தர விலக்கம் $\sigma = \sqrt{npq}$ $(\sigma^2 = \mu_2)$

மேலும், $\mu_4 = npq\,(1 + 3\,npq - 6pq)$ ... ... (4)

என எளிதில் நிறுவலாம்.

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(q-p)^2\, n^2p^2q^2}{n^3p^3q^3} = \frac{(q-p)^2}{npq}$$

$$\therefore\ \gamma_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (5)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{npq\,(1 + 3\,npq - 6pq)}{n^2p^2q^2}$$

$$= \frac{1 + 3\,npq - 6\,pq}{npq} = 3 + \frac{1 - 6\,pq}{npq}$$

$$\therefore \quad \beta_2 = 3 + \frac{1 - 6pq}{npq} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

மாதிரி 1.

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பொருத்துக.

x: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

y: 6, 20, 28, 12, 8, 6, 0, 0, 0, 0.

இங்கு $n = 10, \quad N = \Sigma f_i = 80.$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{0+20+56+36+32+30+0+0+0+0+0}{80}$$

$$= \frac{174}{80}$$

ஆனால், $\bar{x} = np \qquad \therefore \quad np = \frac{174}{80}.$

எனவே, $p = \frac{174}{80 \times 10} = 0{\cdot}2175$

$$q = 1 - p = 1 - 0{\cdot}2175 = 0{\cdot}7825$$

$\therefore$ ஈருறுப்புப் பரவல் $= N(q+p)^n$

$$= 80\,(0{\cdot}7825 + 0{\cdot}2175)^{10}$$

மாதிரி 2:

ஏராளமாக உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனத்தில் பத்தில் ஒன்று பழுதுள்ளது எனின், எவையேனும் 30 பொருள்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் 3 பழுதடைந்தவையாகவிருக்க என்ன நிகழ் தகவு?

மொத்த உற்பத்திப் பொருள்களில் ஒன்று பழுதடைய நிகழ் தகவு $\frac{1}{10}$.

$$\therefore \quad p = \frac{1}{10}$$

$$q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

30 பொருள்கள் கொண்ட மாதிரியில் 3 பழுதடைந்த பொருள்களுக்கு நிகழ் தகவு

$$= \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^{30} \text{-ன் நான்காவது உறுப்பு}$$

$$= 30_{c3}\left(\frac{9}{10}\right)^{27}\left(\frac{1}{10}\right)^{30}$$

$$= 30_{c3}\,\frac{9^{27}}{10^{30}}$$

$$= 0{\cdot}2355$$

மாதிரி 3 :

ஒவ்வொன்றும் மூன்று குழந்தைகளுடைய 800 குடும்பங்களில் குறைந்தது ஓர் ஆண் குழந்தை கொண்ட குடும்பங்கள் எவ்வளவு?

ஒரு குழந்தை ஆண் அல்லது பெண்ணாக இருக்க நிகழ் தகவு

$$= \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad p = \frac{1}{2} = q.$$

(i) எனவே, மூன்றில் ஒன்று ஆணாக இருக்க நிகழ் தகவு

$$= 3_{c1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

(ii) மூன்றில் இரண்டு ஆணாக இருக்க நிகழ் தகவு

$$= 3_{c2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

(iii) மூன்றில் அனைத்தும் ஆணாக இருக்க நிகழ் தகவு

$$= 3_{c3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

எனவே குறைந்தது ஒன்று ஆணாக இருக்க நிகழ் தகவு

= ஓர் ஆண் குழந்தையின் நிகழ் தகவு + இரு ஆண் குழந்தைகளுக்கு நிகழ் தகவு

+ மூன்று ஆண் குழந்தைகளுக்கு நிகழ் தகவு

$$= 3_{c1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3_{c2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3_{c3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3[3_{c1} + 3_{c2} + 3_{c3}]$$

$$= \frac{1}{8}[3 + 3 + 1] = \frac{7}{8}.$$

எனவே, குறைந்தது ஓர் ஆண் குழந்தையுடைய மொத்த குடும்பங்கள்,

$$800 \times \frac{7}{8} = 700.$$

பயிற்சி 19.1

(1) ஒவ்வொரு தடவையும் 6 பகடைகள் வீதம் 729 தடவைகள் வீசப்படுகின்றன. குறைந்தது 3 பகடைகள் 5 அல்லது 6ஐ எவ்வளவு முறைகள் காட்டும்?

(2) ஐந்து பகடைகள் 96 தடவைகள் வீசப்படுகின்றன. 4, 5, 6 விழுவது வெற்றியாகக் கருதப்படின், ஈருறுப்பு விதிப்படி, கணக்கியல் அலைவெண்களைக் காண்க.

(3) ஒவ்வொரு தடவையும் 6 பகடைகள் வீதம் 10,00,000 தடவைகள் வீசப்பட்டன. ஐந்து புள்ளி கொண்ட முகம் விழுவது வெற்றியாகக் கருதப்படின், ஈருறுப்பு விதிப்படி, கணக்கியல் அலைவெண்களைக் காண்க.

(4) 6 பகடைகள் வீசப்பட்டு 3 அல்லது 5 விழுவது வெற்றியாகக் கருதப்படுகிறது,

(i) நான்கு வெற்றிகளுக்கு நிகழ் தகவு 0·0823,

(ii) குறைந்தது நான்கு வெற்றிகளுக்கு நிகழ் தகவு 0.0988,

(iii) அதிகப்படி நான்கு வெற்றிகளுக்கு நிகழ் தகவு 0·9825 என நிறுவுக.

(5) ஒரு நிறுவனம் தயாரிக்கும் பொருள்களில் பழுதுள்ளவை 5 சதவீதம் எனின், 25 பொருள்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில்

(i) 3 பழுதடைந்தவையாகவிருக்க

(ii) பழுதடைந்தவை 3-க்கு மேல் இல்லாமலிருக்க,

நிகழ் தகவுகள் யாவை?

19-3. இயல் நிலைப் பரவல் (Normal Distribution)

ஒரு மாறி, ஒரு கணக்கியல் சூத்திரத்துக்குட்பட்ட அலைவெண்களைப் பெற்று, $(-\infty, \infty)$ இடை வெளியிலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் பெற்றால், அது இயல் நிலைப் பரவலில் அமைகின்றது எனக் கூறப்படும். இயல் நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

இங்கு, $\bar{x}$ = கூட்டுச் சராசரி

σ = தர விலக்கம்.

இயல் நிலைப் பரவலின் அலைவு எண் வரை, இயல் நிலை வரை எனப்படும்.

19-4. இயல் நிலை வரையின் பண்புகள்

(1) இயல் நிலை வரை $x = \bar{x}$ என்ற கோட்டுடன் சமச்சீரில் உள்ளது. ஆதியை x ஆயம் வழி $x = \bar{x}$ புள்ளிக்கு மாற்ற, வரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ என்றாகும்.}$$

இயல் நிலை வரை இரு பக்கமும் கந்தழிவரை நீண்டு மணி வடிவில் (Bell shaped) இருக்கும்.

(2) $(-\infty, \infty)$ இடைவெளியில் இயல்நிலை வரையின் கீழுள்ள மொத்த பரப்பு 1 ஆகும்.

ஒரு செவ்வகப்படத்தின் நெருக்கமே அலைவெண் வளை கோடாகும். எனவே, ஓர் இடைவெளியிலுள்ள, வளை கோட்டிற்குள் அமைந்த பரப்பு, அவ்விடை வெளியிலுள்ள, மொத்த அலை வெண்ணாகும். எனவே, முழு வளை கோட்டிற்குள் அமைந்த பரப்பு மொத்த அலைவெண்ணாகும்.

$$\therefore \quad N = \int_{-\infty}^{\infty} y \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \frac{x^2}{2\sigma^2} = t$$

$$x = \sigma\sqrt{2}t.$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{2}\,\sigma\, dt \qquad dx = \sqrt{2}\,\sigma dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

எனவே, $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ நிகழ் தகவுகளின் பரவலின் அலைவெண் வரையைக் கொடுக்கிறது.

$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ ஓர் அலைவெண் பரவலைக் குறிக்கும்.

இங்கு N பரவலின் மொத்த அலைவெண்ணாகும்.

(3) $x = x_1$, $x = x_2$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே இயல் நிலை வரையின் அடியிலுள்ள பரப்பு,

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\,dx, \qquad t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad dt = \frac{1}{\sigma}\,dx$$

$$t_1 = \frac{x_1-\bar{x}}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t_2} e^{-t^2}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt,$$

$$t_2 = \frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}$$

$$= \int_{0}^{t_2} \phi(t)\,dt - \int_{0}^{t_1} \phi(t)\,dt.$$

t-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $\int_{0}^{t} \phi(t)\,dt$-ன் மதிப்புகள் தெரிந்தால் பரப்பு A ஐக் கணக்கிடலாம்.

இங்கு $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$.

(4) $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ எனும் வளைவு $t = 0$ உடன் சமச் சீரில் உள்ளதால்,

$$\int_0^{-t} \phi(t)\,dt = -\int_0^{+t} \phi(-t)\,dt$$

$$= -\int_0^{t} \phi(t)\,dt$$

எனவே, $\int_0^{t} \phi(t)\,dt$ -ன் மதிப்புகள் t-ன் அனைத்து நேரெண் மதிப்புகளுக்குத் தெரிந்தால் போதுமானது.

t-ன் சில மதிப்புகளுக்குப் பரப்புப் பட்டியல் பிறிதொரு பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

(5) இயல் நிலை வரையின் அடியில் $x = \bar{x} - \sigma$, $x = \bar{x} + \sigma$ என்ற கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள பரப்பு 0·6826.

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-t^2/2}\,dt, \qquad t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

$$dt = \frac{1}{\sigma}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1} e^{-t^2/2}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-1} e^{-t^2/2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-^2/_2}\, dt$$

$$= 2(0{\cdot}3413)$$

$$= 0{\cdot}6826$$

(6) கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ -லிருந்து கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $\frac{4}{5}\sigma$ (தோராயமாக).

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x - \bar{x}| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} |x-\bar{x}|\, dx, \qquad z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

$$dz = \frac{1}{\sigma} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/_2} |z| \sigma . \sigma\, dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |z| e^{-z^2/_2}\, dz$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-8}^{0} ze^{-z^2/_2}\, dz + \int_0^{\infty} ze^{-z^2/_2}\, dz \right]$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} ze^{-z^2/_2}\, dz$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma = 0.7988\,\sigma$$

$$= \frac{4}{5}\,\sigma.$$

(7) இயல் நிலைப் பரவலில் ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் பூச்சியமாகும்.

$$\mu_{2n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{2n+1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$= \frac{\sigma^{2n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2n+1}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz,\ z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$$

$$= 0 \quad [\because f(x) \text{ ஒற்றைப்படை சார்பு}].$$

மேலும்,

$$\mu_{2n} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^{2n}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2n-1}\, z\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \left[-z^{2n-1}\, e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2n-1)\, z^{2n-2}\, e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= (2n-1)\,\sigma^2\,\mu_{2n-2}$$

$$\therefore\ \mu_{2n} = (2n-1)\,\sigma^2\,\mu_{2n-2}$$

இவ்வாறே, $\mu_{2n-2} = (2n-3)\,\sigma^2\,\mu_{2n-4}$,

$\mu_{2n-4} = (2n-5)\,\sigma^2\,\mu_{2n-6}$, முதலியன.

$$\therefore \quad \underline{\mu_{2n} = (2n-1)(2n-3)\ldots 3\,.\,1\,.\,\sigma^{2n}}$$

குறிப்பாக $\mu_2 = \sigma^2$

$\mu_4 = 3\,\sigma^4$.

8. நிகழ்திறப் பிழை $\frac{2}{3}\,\sigma$ ஆகும்.

நிகழ் தகவை $\frac{1}{2}$ ஆகக் கொண்டு, கூட்டுச் சராசரிக்கு இரு பக்கத்திலும் அமையும் விலக்கம் நிகழ்திறப் பிழை (Probable error) எனப்படும். அதாவது நேரில் கண்ட அம்சங்களில் பாதியினைக் கொண்ட இடைவெளியின் தூரம் நிகழ்திறப் பிழை எனப்படுகிறது.

$$\therefore \quad \int_{-t}^{t} \phi(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

இதில் t-ன் மதிப்பு நிகழ்திறப் பிழையாகும்.

$$\int_{-t}^{t} \phi(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$2\int_{0}^{t} \phi(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \int_{0}^{t} \phi(t)\,dt = \frac{1}{4}.$$

அட்டவணையிலிருந்து $t = 0{\cdot}6745\,\sigma$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \underline{t = \frac{2}{3}\,\sigma \text{ (தோராயமாக)}}$$

இயல்நிலை வரை $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ -ன் y ஆயத்தூர பரப்புப் பட்டியல்.

t	$\phi(t)$	$\int_0^t \phi(t)\, dt$	t	$\phi(t)$	$\int_0^t \phi(t)\, dt$
0·0	·3989	·0000	2·0	·0540	·4772
0·1	·3970	·0398	2·1	·0440	·4821
0·2	·3910	·0793	2·2	·0355	·4861
0·3	·3814	·1179	2·3	·0283	·4893
0·4	·3653	·1554	2·4	·0224	·4918
0·5	·3521	·1915	2·5	·0175	·4938
0·6	·3332	·2257	2·6	.0136	·4953
0·7	·3123	·2580	2·7	·0104	·4965
0·8	·2897	·2881	2·8	·0079	·4974
0·9	·2661	·3159	2·9	·0060	·4981
1·0	·2420	·3413	3·0	·0044	·4987
1·1	·2179	·3643	3·1	·0033	·4990
1·2	·1942	·3849	3·2	·0024	·4993
1·3	·1714	·4032	3·3	·0017	·4995
1·4	·1497	·4192	3·4	·0012	·4997
1·5	·1295	·4332	3·5	·0009	·4997
1·6	·1109	·4452	3·6	·0006	·4998
1·7	·0940	·4554	3·7	·0004	·49989
1·8	·0790	·4641	3·8	·0003	·49993
1·9	·0656	·4713	3·9	·0002	·49995

மாதிரி 4 :

1000 தொழிலாளர்களது வார ஊதியப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி ரூ. 20, தரவிலக்கம் ரூ. 4·20. இது ஓர் இயல் நிலைப் பரவல் எனின்,

(i) வார ஊதியம் ரூ. 25-க்கு மேல் பெறுபவர்கள்,

(ii) வார ஊதியம் ரூ. 10-க்குள் பெறுவர்கள்,

(iii) ரூ. 15-க்கு மேல் ரூ. 30-க்குள் பெறுபவர்கள்,

இவர்களது எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக.

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x} = 20$

தரவிலக்கம் $\sigma = 4{\cdot}2$

எனவே, இயல்நிலைப் பரவலின் வரை

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{4{\cdot}2\sqrt{2\sigma}}\, e^{-\frac{(x-20)^2}{2(4.2)^2}}\,.$$

(i) வார ஊதியமாக ரூ. 25 வரை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு P_1 எனின்,

$$P_1 = \int_{-\infty}^{25} \frac{1}{4\,2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-20)^2}{2(4.2)^2}}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1\cdot19} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/_2}\, dt, \qquad t = \frac{x-20}{4.2}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/_2}\, dt + \int_{0}^{1\cdot19} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/_2}\, d$$

$= 0.5 + .3829$

$= 0.8829$

$= 0.883.$

எனவே, 88.3% தொழிலாளர்கள் ரூ. 25 வரை வார ஊதிய மாகப் பெறுவர்.

∴ 11.7% தொழிலாளர்கள் ரூ. 25-க்கு மேல் வார ஊதிய மாகப் பெறுவர்.

மொத்த தொழிலாளர்கள் 1000 ஆதலின், ரூ. 25-க்கு மேல் வார ஊதியம் பெறுபவர்கள் எண்ணிக்கை 117.

(ii) ரூ. 10 வரை வார ஊதியமாகப் பெறுவதற்கான நிகழ் தகவு P_3 எனின்,

$$P_3 = \int_{-\infty}^{10} \frac{1}{4{\cdot}2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{2(4{\cdot}2)^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2{\cdot}38} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \quad t = \frac{x-20}{4{\cdot}2}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \int_{0}^{2{\cdot}38} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$$= 0{\cdot}5 - 0{\cdot}4913$$

$$= {\cdot}0087.$$

∴ ·87% தொழிலாளர்கள் ரூ. 15 வரை வார ஊதியமாகப் பெறுவர். அதாவது மொத்த தொழிலாளார்கள் 1000 பேரில் 9 பேர் ரூபாய் 10 வரை வார ஊதியமாகப் றெுவர்.

(iii) ரூ 15 முதல் ரூ 30 வரை ஊதியமாகப் பெற நிகழ் தகவு p_3 எனின்,

$$P_3 = \int_{15}^{30} \frac{1}{4{\cdot}2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)}{2(4{\cdot}2)^2}} dx$$

$$= \int_{-1{\cdot}19}^{2{\cdot}38} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \quad t = \frac{x-20}{4{\cdot}2}$$

$$= \int_{-1.19}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt + \int_{0}^{2\cdot 38} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

$$= \int_{0}^{2\cdot 38} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt - \int_{0}^{-1\cdot 19} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

$$= \int_{0}^{2\cdot 388} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt + \int_{0}^{1\cdot 19} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

$$= \cdot 4613 + \cdot 3829$$

$$= \cdot 8742$$

எனவே, 87.42% தொழிலாளார்கள் ரூ 15முதல் ரூ 30 வரை வார ஊதியம் பெறுபவர். அதாவது 1000 தொழிலாளர்களில் 874 பேர்கள் ரூ. 15 முதல் ரூ. 30 வரை வார ஊதியமாகப் பெறுவர்.

மாதிரி 5 :

ஒரு சோதனையில் மதிப்பெண்களது பரவல் இயல்நிலைப் பரவலாகும். 40 மதிப்பெண்களுக்குக் கீழ் பெற்றவர்கள் 21%, 60-க்கு மேல் பெற்றவர்கள் 23% எனின், பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், தர விலக்கத்தையும் காண்க.

40 மதிப்பெண்களுக்குக் கீழ் வாங்கியவர் 21% எனின், $t = \dfrac{40 - \bar{x}}{\sigma}$ முதல் $t = 0$ வரை உள்ள இயல்நிலைப் பரப்பு $= 0\cdot 5 - 0\cdot 21 = 0\cdot 29$ ஆகும். பரப்புப் பட்டியலிலிருந்து இதற்கான t-ன் மதிப்பு $= -0\cdot 8068$.

$$\therefore \quad \frac{40 - \bar{x}}{\sigma} = -0\cdot 8068$$

அதாவது,

$$\bar{x} - 0\cdot 8068\, \sigma = 40 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

60-க்கு மேல் வாங்கியவர் 23% எனின், $t = 0$ முதல் $t = \dfrac{60 - \bar{x}}{\sigma}$ வரை உள்ள இயல் நிலைப்பரப்பு $0\cdot 5 - 0\cdot 23 = 0\cdot 27$ ஆகும்.

∴ புரப்புப் பட்டியலிலிருந்து இதற்கான t-ன் மதிப்பு $= 0{\cdot}7398$.

$$\therefore \quad \frac{60 - \bar{x}}{\sigma} = 0{\cdot}7398$$

அதாவது,

$$\bar{x} + 0{\cdot}7398\,\sigma = 60 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\bar{x} + 0{\cdot}7398\,\sigma = 60 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\bar{x} - 0{\cdot}8068\,\sigma = 40 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$1{\cdot}5466\,\sigma = 20$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{20}{1{\cdot}5466} = 12{\cdot}93$$

$$\bar{x} = 50{\cdot}43.$$

பயிற்சி 19·2

(1) 67 மரங்களது குறுக்குப் பகுதியின் விட்ட அளவினை அங்குலத்தில் கீழ்க்கண்ட பரவல் தருகிறது. இதற்குரிய இயல் நிலைப்பரவலைக் காண்க.

x: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

y: 1, 6, 7, 11, 20, 10, 6, 5, 1.

(2) கீழ்க்காணும் பரவலுக்குரிய இயல் நிலைப் பரவலைக் காண்க.

x	y	x	y
29·5	1	39·5	145
31·5	12	41·5	100
33·5	50	43·5	20
35·5	150	45·5	5
37·5	225		

கணக்கியல் அலைவெண்களையும் காண்க,

(3) ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 12, தர விலக்கம் 2 எனின்,

(i) $x = 10$-லிருந்து $x = 13.5$ வரை,

(ii) $x = 11 \cdot 4$-லிருந்து $x = 14 \cdot 2$ வரை,

(iii) $x = 6$-லிருந்து $x = 18$ வரை

இயல்நிலைப் பரவலின் கீழுள்ள பரப்புகளைக் காண்க.

(4) போர்வீரர்களது கூட்டுச் சராசரி உயரம் 68·22″, தர விலக்கம் 10·8″ எனின், 1000 போர்வீரர்கள் கொண்ட ஓர் அணியில் 6 அடி உயரத்திற்கு மேல் உள்ளவர்கள் எவ்வளவு பேர் இருக்கலாம்? (இயல் நிலை வரையின் கீழ் $x = 0$-லிருந்து $x = 0 \cdot 35$ வரை பரப்பு 0·1368, $x = 0$-லிருந்து $x = 1 \cdot 15$ வரை பரப்பு 0·3746).

(5) 1000 பேர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வின் கூட்டுச் சராசரி 14, தரவிலக்கம் 1·5. இது இயல்நிலைப் பரவல் எனின்,

(i) 12-லிருந்து 15 வரை மதிப்பெண்கள் பெறுபவர்கள்,

(ii) 18-க்கு மேல் மதிப்பெண் பெறுபவர்கள்,

(iii) 8-க்குக் கீழ் மதிப்பெண் பெறுபவர்கள் எண்ணிக்கைகள் என்ன?

(6) ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் 45-க்குக் கீழ் 31%, 64-க்கு மேல் 8% எனின், அப்பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, தரவிலக்கம் காண்க.

(7) ஓர் இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியில் 30-க்குக் கீழே 15%-ம், 40-க்கு மேல் 10% அமைந்துள்ளதெனின், அதன் கூட்டுச் சராசரியையும், தரவிலக்கத்தினையும் கணக்கிடுக.

(8) ஒரு பந்தயத்தில் வெற்றி நிகழ்தகவு p எனின், n பந்தயங்களில் x வெற்றிகள் பெறுவதற்குரிய வாய்ப்பு என்ன? $p = \frac{3}{8}$, $n = 18$ எனின், 9-க்கு மேற்பட்ட பந்தயங்களில் வெற்றிபெற வாய்ப்பு ஏறத்தாழ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-5/4}^{\alpha} e^{-t^2/2}\, dt$$ என நிறுவுக.

(9) கீழ்க்கண்ட பட்டியலுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவலைப் பொருத்துக.

x	y	x	y
4	1	16	38
6	7	18	20
8	15	20	13
10	22	22	5
12	35	24	1
14	43		

(10) ஒரு போட்டித் தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களது கூட்டுச் சராசரி 63, தரவிலக்கம் 8·4 எனின், 10% மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுக்க எத்தனை மதிப்பெண்களை வெற்றிபெறக் குறைந்த அளவாகக் கொள்ளவேண்டும்?

19-5. பாய்ஸான் பரவல்

வெற்றிக்குரிய நிகழ் தகவு p, தோல்விக்குரிய நிகழ் தகவு q எனின், n சோதனைகளில் r வெற்றிகளுக்கும் $(n-r)$ தோல்விகளுக்கும் நிகழ் தகவு ${}^nc_r\, p^r\, q^{n-r}$ என ஈருறுப்புப் பரவலில் கண்டோம். அதன் நெருக்கத்தில் $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = m$ ஆகும். இங்கு m ஒரு நிலையெண்ணாகும்.

எனவே, $P(r)$

$$= {}^nc_r\, p^r\, q^{n-r}$$

$$= {}^nc_r\, p^r\, (1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\, p^r\,(1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{\frac{m}{p}\left(\frac{m}{p}-1\right)\left(\frac{m}{p}-2\right)\cdots\left(\frac{m}{p}-r+1\right)}{r!}\, p^r\,(1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{m(m-p)(m-2p)\dots(m-\overline{r-1}p)}{r!}(1-p)^{m/p-r}$$

$$= \frac{m(m-p)(m-2p)\dots(m-\overline{r-1}p)(1-p)^{m/p}}{r!(1-p)^r}$$

$$= \frac{m(m-p)(m-2p)\dots(m-\overline{r-1}p)[(1-p)^{1/p}]^m}{r!(1-p)^r}$$

$$\therefore \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} = P(r) = \frac{m^r}{r!}e^{-m}$$

எனவே, பாய்ஸான் பரவலில், r வெற்றிகள் பெறுவதற்குரிய அலைவெண் $e^{-m}\frac{m^r}{r!}$ ஆகும்.

மேலும், இதிலிருந்து பாய்ஸான் பரவல் ஈறுப்புப் பரவலின் நெருக்கமெனத் தெளிவாகிறது. மீண்டும் பாய்ஸான் பரவலில் மொத்த அலைவெண்

$$N = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!}$$

$$= e^{-m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{m^r}{r!}$$

$$= e^{-m} \cdot e^m = e^0 = 1.$$

எனவே, மொத்த அலைவெண் $N = 1$.

19-6. பாய்ஸான் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, தூரவிலக்கம் காணுதல்

கூட்டுச் சராசரி,

$$\bar{x} = \sum_{0}^{\infty} r\, f(r)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} r \cdot e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!}$$

$$= e^{-m} \sum_{0}^{\infty} r \cdot \frac{m^r}{r!}$$

$$= e^{-m} \sum_{1}^{\infty} \frac{m^r}{(r-1)!}$$

$$= m e^{-m} \sum_{1}^{\infty} \frac{m^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$= me^{-m} \cdot e^{m} = me^{0}$$

$$= m.$$

எனவே, பாய்ஸான் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி,

$$\underline{\bar{x} = m.}$$

மீண்டும்,

$$s^2 = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 f(r)$$

$$= \sum_{0}^{\infty} r^2 e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} [r(r-1)+r] e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} r(r-1) e^{-m} \frac{m^r}{r!} + \sum_{0}^{\infty} r e^{-m} \frac{m^r}{r!}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} r(r-1) e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!} + m$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty} e^{-m} . \frac{m^r}{(r-2)!} + m$$

$$= e^{-m} m^2 \sum_{r=2}^{\infty} \frac{m^{r-2}}{(r-2)!} + m.$$

$$= e^{-m} . m^2 . e^m + m$$

$$= m^2 + m \qquad (\because \; e^{-m} . e^m = e^0 = 1)$$

$\therefore \; s^2 = m^2 + m.$

எனவே, $\mu_2 = \sigma^2 = s^2 - d^2$

$$= (m^2 + m) - m^2$$

$$= m^4$$

எனவே, தரவிலக்கம் $\underline{\sigma = \sqrt{m}}$

ஆகவே, பாய்ஸான் பரவலில்

$$\bar{x} = \mu_2 = m$$

இது பாய்ஸான் பரவலின் தனிச் சிறப்பாகும்.

மாதிரி 6 :

கீழ்க்கண்ட பரவலுக்குரிய கணக்கியல் அலைவெண்களைக் காண்க.

x :	0	1	2	3	4
f :	109	65	22	3	1.

கூட்டுச் சராசரி

$$\bar{x} = \frac{109(0) + 1(65) + 2(22) + 3(3) + 4(1)}{109 + 65 + 22 + 3 + 1}$$

$$= \frac{65 + 44 + 9 + 4}{200}$$

$$= \frac{122}{200}$$

$$= 0.61.$$

எனவே, கூட்டுச் சராசரி 0.61. அதாவது $m = 0.61$.

$$\therefore \quad P(r) = e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!}$$

அதாவது, $P(r) = e^{-0.61} \cdot \frac{(0.61)^r}{r!}$

எனவே,

0-ன் கணக்கியல் அலைவெண் $200 \cdot e^{-0.61} = 108.7$.

1-ன் கணக்கியல் அலைவெண்

$$= 200 . e^{-0.61} \frac{(0.61)^1}{1!} = 66.3$$

2-ன் கணக்கியல் அலைவெண்

$$= 200 . e^{-0.61} \frac{(0.61)^2}{2!} = 20.2$$

3-ன் கணக்கியல் அலைவெண்

$$= 200 . e^{-0.61} \frac{(0.61)^3}{3!} = 4.1$$

4-ன் கணக்கியல் அலைவெண்

$$= 200 . e^{-0.61} \frac{(0.61)^4}{4!} = 0.7$$

மாதிரி 7 :

மொத்தத்தில் பழுதடைந்தவை 1% எனின், 1000 கொண்ட ஒரு மாதிரியில்,

(i) 4 பழுதடைந்தவையாகவிருக்க,

(ii) பழுதடைந்தவை 2-க்கு மேற்படாமலிருக்க,

(iii) குறைந்தது 3 பழுதடைந்திருக்க, நிகழ் தகவுகள் காண்க.

இங்கு $p = 0.01, \quad n = 1000$

$\therefore \quad m = np = 0.01 \times 1000 = 10.$

r பொருள்கள் பழுதடைந்திருக்க, நிகழ் தகவு,

$$= e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r\,!}$$

(i) 4 பழுதடைந்திருக்க, நிகழ் தகவு

$$= e^{-10} \cdot \frac{10^4}{4!}$$

$$= \cdot 0189$$

(ii) 0 பொருள் பழுதடைந்திருக்க, நிகழ் தகவு

$$= e^{-10} \cdot \frac{10^0}{0 \cdot 1} = e^{-10}$$

1 பழுதடைந்திருக்க, நிகழ் தகவு

$$= e^{-10} \cdot \frac{10}{1!} = 10 \cdot e^{-10}$$

2 பழுதடைந்திருக்க, நிகழ் தகவு

$$= e^{-10} \cdot \frac{10^2}{2!} = 50 \cdot e^{-10}$$

எனவே, இரண்டுக்குமேல் பழுதடையாமல் இருக்க, நிகழ் தகவு

$$= e^{-10} + 10 \cdot e^{-10} + 50 \cdot e^{-10}$$

$$= 61\, e^{-10}$$

$$= \cdot 0027$$

(iii) குறைந்தது மூன்று பழுதடைந்தவையாக விருக்க, நிகழ் தகவு

$$= 1 - .0027$$

$$= .9973$$

மாதிரி 8 :

ஒரு நிறுவனம் தன்னிடமுள்ள இரு பொறியூர்திகளைத் தினமும் வாடகைக்குக் கொடுக்கிறார்கள். ஒவ்வொரு நாளும் ஊர்தி வேண்டுபவர்களது எண்ணிக்கை கூட்டுச் சராசரி 1.5 கொண்ட பாய்ஸான் பரவலில் அமைந்துள்ளது. ஊர்தி வேண்டப்படாத நாள்களின் விகிதாசாரத்தையும். ஊர்தி கிடைக்காமல் போகும் நாள்களின் விகிதாசாரத்தையும் கணக்கிடுக.

ஒரு நாளில் r தேவைகளின் நிகழ் தகவு

$$P(r) = e^{-m} \cdot \frac{m^r}{r!}$$

$$= e^{-1.5} \frac{(1\cdot5)^r}{r!}$$

0 தேவையின் நிகழ்தகவு $= e^{-1.5} = 0\cdot2231$

1 தேவையின் நிகழ்தகவு $= e^{-1.5} \frac{1\cdot5}{1!} = 0\cdot33465$

2 தேவையின் நிகழ்தகவு $= e^{-1.5} \frac{(1\cdot5)^2}{2!}$

$$= e^{-1.5} \times 1\cdot125 = 0\cdot2509$$

எனவே, ஊர்தி தேவைப்படாத நாள்களின் விகிதாசாரம் $= 0\cdot2231.$

ஊர்தி கிடைக்காமல் போகும் நாள்களின் விகிதாசாரம்

$$= 1 - 0\cdot2231 - 0\cdot3347 - 0\cdot2509$$

$$= 1 - 0\cdot8087$$

$$= 0\cdot1913$$

பயிற்சி 19-3.

(1) கீழ்க்கண்ட பரவல் பாய்ஸான் பரவல் எனக் காட்டுக.

x :	0	1	2	3	4
y :	46	38	22	9	1

(2) ஓர் அலகு பரப்பில் எதிர்பார்க்கப்படும் பாக்டீரியா கிருமிகள் 5 எனின், 25 அலகு பரப்பினில் 5 அல்லது 5-க்கு மேற்பட்ட கிருமிகளைக் காண்பதற்குரிய நிகழ் தகவினைக் காண்க.

(3) பின் வரும் விவரங்களுக்கு ஒரு பாய்ஸான் பரவலைப் பொருத்துக.

x:	0	1	2	3	4
y:	211	90	19	5	0.

(4) ஆறு நாணயங்கள் 6400 தடவைகள் சுண்டப்படுகின்றன. பாய்ஸான் பரவலைக் கொண்டு r தடவைகள் 6 தலைகள் விழுவதற்குரிய நிகழ் தகவினைக் கணக்கிடுக.

(5) குதிரை உதைத்து மாண்டவர்களது எண்ணிக்கை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x:	0	1	2	3	4
f:	109	65	22	3	1

இப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும், கணக்கியல் அலைவெண்களையும் கணக்கிடுக.

(6) சவரப் பிளேடுகள் தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட பிளேடுகளில் பழுதடைந்தவைக்கான நிகழ் தகவு $\frac{1}{500}$. ஒவ்வொரு பாக்கெட்டிலும் உள்ள பிளேடுகளின் எண்ணிக்கை 10. பாய்ஸான் பரவலைப் பயன்படுத்தி 10,000 பாக்கெட்டுகளில்,

(i) பழுதற்ற பிளேடுகள் கொண்ட பாக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை,

(ii) ஒரு பழுது பிளேடு கொண்ட பாக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை,

(iii) இரு பழுது பிளேடுகள் கொண்ட பாக்கெட்டுகளின் எண்ணிக்கை.

ஆகியவற்றைத் தோராயமாகக் கணக்கிடுக.

(7) கீழ்க்காணும் பாய்ஸான் பரவலில் கணக்கியல் அலைவெண்களைக் கணக்கிடுக.

x	f
0	46
1	71
2	48
3	23
4	9
5	3
6	0

மேற்கோள் நூல்கள்

1. University Calculus —*Taylor and Wade*

2. Differential and Integral Calculus —*Piskunov*

3. Calculus —*Morril*

4. Calculus —*Bacon*

5. Elementary Treatise on the Calculus —*Gibson*

6. Differential and Integral Calculus —*Piskunov*

7. Advanced Calculus —*John M. H. Olm*

8. Mathematics for Engineers —*W. N. Rose*

9. The Laplace Transform —*F. D. Murnagham*

10. Mathematics for Engineering Students —*T. Natarajan & T. K. Manickavasagam Pillai*

11. Algebra —*W. L. Ferrar*

12. A University Algebra —*D. E. Littlewood*

13. A Text Book of Matrices —*Shantinarayan*

14. Matrices —*T. Govindarajan*

15. Matrices —*Ray & Seth*

16. Modern Algebra —*McCoy*

17. Modern Algebra —*Shantinarayan*

18. Elementary Set Theory —*K. T. Leung*

19. Theory of Groups —*Ian D. Macdonald*

20. An Introduction to Abstract Algebra —*F. M. Hall*

21. Statistics —*D. Elhance*

22. A Text Book of Statistics —*Kapoor*

23. Theory of Fourier Integral —*E. C. Titchmarsh*

24. Introductory Course in Differential Equations —*D. E. Murray*

25. Differential Equations —*T. Natarajan*

கலைச்சொற்கள்

A

Addition Laws	—	கூட்டல் நியதிகள்
Additive Inverse	—	நேர்மாறு கூட்டுத் தொகை
Addition modulo m	—	கூட்டல் மட்டு *m*
Adjoint of a matrix	—	துணை அணி, சேர்ப்பு அணி
Associative law	—	தொகுப்பு விதி
Augmented Matrix	—	மிகுதி படுத்திய அணி
Arithmetic mean	—	கூட்டுச் சராசரி

B

Bar diagram	—	பட்டை விளக்கப்படம்
Binary Composition	—	இணை சேர்க்கை
Binomial Distribution	—	ஈருறுப்புப் பரவல்

C

Characteristic equation	—	சிறப்பியல்பு சமன்பாடு
Classify	—	வகைப்படுத்து
Co-efficient of Dispersion	—	பரவுகைக் கெழு
Co-factors	—	இணைக்காரணிகள்
Column Matrix	—	நிரல் அணி
Column Vector	—	நிரல் வெக்டர்
Commutative law	—	மாற்று விதி
Complement	—	நிரப்பி
Complimentary function	—	துணைத் தீர்வு
Complete Integral	—	முழுத் தீர்வு
Complex	—	சிக்கல்
Conjugate Matrix	—	இணையிய அணி
Consistent	—	பொருத்தமுடைய
Constant Mapping	—	நிலையான உருமாற்றம்
Cyclic group	—	வட்டக்குலம்
Cyclic permutation	—	வட்ட வரிசை மாற்றம்
Correlation	—	ஒட்டுறவு
Cumulative Frequency curve	—	அலைவெண் வரை

D

Determinant — அணிக்கோவை
Diagonal Matrix — சம மூலைவரை அணி
Disjoint set — ஒன்றாத கணம்
Distributive law — பங்கீட்டு விதி
Direction cosines — திசைக் கொசைன்கள்
Division ring — வகுத்தல் வளையம்
Double Integral — இரு மாறித் தொகையீடு

E

Eigen values — எய்கண் மதிப்புகள்
Element of a Matrix — அணி மூலகம்
Empirical formula — நடைமுறை சூத்திரம்
Equal matrices — சம அணிகள்
Equal sets — சம கணங்கள்
Equivalent matrices — இணை மாற்று அணிகள்
Even function — இரட்டைச் சார்பு

F

Field — களம்
Finite set — முடிவுற்ற கணம்
Frequency curve — அலைவெண் வரை
Frequency polygon — அலைவெண் பலகோணம்

G

Geometric Mean — பெருக்கு சராசரி
Group — குலம்

H

Harmonic Analysis — இசைப் பாகுபாடு
Harmonic Mean — இசைச் சராசரி
Half range series — அரை இடைவெளித் தொடர்
Histogram — பரவல் செவ்வகம்

I

Ideal — கந்தழி
Identity element — சர்வசம மூலகம்
Identity permutation — சர்வசம வரிசை மாற்றம்
Identity mapping — சர்வசம உருமாற்றம்

Identity matrix — முற்றொருமை அணி
Infinite set — முடிவிலி கணம்
Inner product — உட்பெருக்குத் தொகை
Integral domain — எண் அரங்கம்
Integral — தொகை
Intersection — வெட்டு
Into mapping — உள் உருமாற்றம்
Inverse element — நேர்மாறு மூலகம்
Inverse mapping — நேர்மாறான உருமாற்றம்
Inverse of a Matrix — நேரெதிர் அணி
Inverse permutation — நேர்மாறு வரிசை மாற்றம்
Inverse transform — நேர்மாறு மாற்றம்

K

Kurtosis — தட்டை அளவை

L

Left Cancellation Law — இடது நீக்கல் விதி
Linear Correlation — நேர்கோட்டுக்குரிய ஒட்டுறவு
Leptikurtic — குறைத் தட்டையான
Linear dependence — ஒருபடிச் சார்பு
Linearly Independent — ஒருபடிச் சார்பற்ற
Lower triangular Matrix — கீழ் முக்கோண அணி

M

Many one into mapping — அனேக ஒன்று உள் உருமாற்றம்
Many one onto mapping — அனேக ஒன்று மேல் உருமாற்றம்
Mapping — உருமாற்றம்
Matrix — அணி
Matrix addition — அணி கூட்டல்
Mean deviation — கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
Median — இடை நிலை
Measure of skewness — கோட்டளவை
Mode — முகடு
Moment — விலக்கப் பெருக்குத் தொகை
Minor of a Matrix — சிற்றணிக் கோவை
Multiple Integral — மடங்குத் தொகையீடு

Multiplicative group — பெருக்குக் குலம்
Multiplication modulo m — பெருக்கல் மட்டு m

N

Non-trivial solution — அற்பமல்லாத தீர்வு
Non-empty set — வெறுமையற்ற கணம்
Normal distribution — இயல்நிலைப் பரவல்
Notation — குறியீடு
Null matrix (Zero matrix) — முற்றும் பூச்சிய அணி
Null vector — பூச்சிய வெக்டர்
Nul set — பூச்சிய கணம்
Null Ideal — பூச்சியக் கந்தழி

O

One to one mapping — ஒன்றுக்கொன்றான உருமாற்றம்
Onto mapping — மேல் உருமாற்றம்
Order — வரிசை
Order of a group — தொகுதியின் வரிசை
Order of the matrix — அணித்தரம்
Ordered pair — வரிசைப்பட்ட சோடி
Orthogonal matrices — செங்குத்தணிகள்

P

Partial Differential equation — பகுதி வகைக்கெழு சமன்பாடு
Particular Integral — சிறப்புத் தீர்வு
Periodic function — திரும்புச் சார்பு
Permutation — வரிசை மாற்றம்
Pictogram — உருவக விளக்கப் படம்
Pie diagram — வட்ட விளக்கப் படம்
Platy kurtivc — மிகத் தட்டையான
Poisson Distribution — பாய்ஸான் பரவல்
Post factor — பின் காரணி
Power — அடுக்கு
Prefactor — முன் காரணி
Principle of least squares — குறைந்த வர்க்கக் கொள்கை

Q

Quartile Deviation — கால்மான விளக்கம்
Questionairre — வினாத்தாள்

R

Range	—	வீச்சு
Rank correlation	—	தர ஒட்டுறவு
Regression line	—	ஒட்டுறவுக்கோடு
Residue class	—	எச்ச இனம்
Right cancellation law	—	வலம் நீக்கல் விதி
Right coset	—	வலது சேர்மை கணம்
Ring	—	வளையம்
Ring with unity	—	ஒருமை கொண்ட கணம்
Row	—	நிரை
Row matrix	—	நிரை அணி
Row vector	—	நிரை வெக்டர்

S

Scalar matrix	—	மூலை வரை அணி
Set	—	கணம்
Set builder	—	கணம் அமைப்பான்
Schedule	—	அட்டவணை
Similar	—	வடிவொத்த
Singular matrix	—	பூச்சியக் கோவை அணி
Singular Integral	—	ஒருமைத் தீர்வு
Skew Symmetric matrix	—	எதிர்ச்சீரணி
Singleton	—	ஒருமைக் கணம்
Standard deviation	—	தரவிலக்கம்
Statistics	—	புள்ளியியல்
Square matrix	—	சதுர அணி
Sub-group	—	உட்குலம்
Sub ring	—	கீழ் வளையம்
Sub set	—	கீழ்க் கணம்
Sub matrix	—	கீழணி
Symmetric matrix	—	சமச்சீரணி

T

Tabulate	—	அட்டவணைப்படுத்து
Tabulate form	—	அட்டவணை வடிவம்
Transpose of a matrix	—	நிரை , நிரல் மாற்று அணி
Triangular matrix	—	முக்கோண அணி
Triple Integral	—	மும்மடித் தொகை

U

Unique solution — ஒரே முறைத் தீர்வு
Unit matrix — அணி அலகு
Universal set — பொதுவான கணம்
Union — ஒன்றிணைப்பு
Upper triangular matrix — மேல் முக்கோண அணி

V

Vector — வெக்டர்
Vector space — வெக்டர் வெளி